

# ANNALEN DER PHYSIK.

130  
F

BEGRÜNDET UND FORTGEFÜHRT DURCH

G 91196

F. A. C. GREN, L. W. GILBERT, J. C. POGGENDORFF, G. U. E. WIEDEMANN, P. DRUDE.

VIERTE FOLGE.

QC1  
AL

BAND 49.

DER GANZEN REIHE 354. BAND.

KURATORIUM:

M. PLANCK, G. QUINCKE,  
W. C. RÖNTGEN, W. VOIGT, E. WARBURG.

UNTER MITWIRKUNG

DER DEUTSCHEN PHYSIKALISCHEN GESELLSCHAFT

HERAUSGEGEBEN VON

W. WIEN UND M. PLANCK.

MIT EINEM PORTRÄT UND ZEHN FIGURENTAFELN.



LEIPZIG, 1916.

VERLAG VON JOHANN AMBROSIIUS BARTH.

QC

I

A6

Ser. 4 V. 49

266320

1. L  
2. C

3. C  
4. V

5. V  
6. N

1. P  
2. E  
K  
in  
3. R  
m  
4. J  
Tr  
5. Jo  
an  
T

## Inhalt.

### Vierte Folge. Band 49.

#### Erstes Heft.

	Seite
1. P. P. Ewald. Zur Begründung der Kristalloptik . . . . .	1
2. Győző Zemplén u. Béla Pogány. Untersuchungen über die innere Reibung von Flüssigkeiten. III. Mitteilung. Innere Reibung und Gleitung tropfbarer Flüssigkeiten . . . . .	39
3. C. W. Oseen. Zur Kritik der Elektronentheorie der Metalle .	71
4. W. Seitz, H. Alterthum u. G. Lechner. Wärmeausdehnung und Kompressibilität von Flüssigkeiten bei tiefen Temperaturen . . . . .	85
5. W. Seitz u. G. Lechner. Wärmeausdehnung und Kompressibilität von Flüssigkeiten bei tiefen Temperaturen . . . . .	93
6. Nachtrag zu „M. Ehrhardt, Über elektrische Schwingungen in Luft und längs Drähten“ . . . . .	116

*Ausgegeben am 4. Februar 1916.*

#### Zweites Heft.

1. P. P. Ewald. Zur Begründung der Kristalloptik. (Fortsetzung.)	117
2. Edward P. Hyde. Bestimmung der wahren Temperatur fester Körper aus dem Schnittpunkt der logarithmischen Isochromaten im sichtbaren Spektrum . . . . .	144
3. R. Gans. Statistische Theorie des Dia-, Para- und Magnetismus . . . . .	149
4. J. Stark. Das neutrale Atom und das positive Atomion als Träger des Banden- und des Serienspektrums des Wasserstoffs	179
5. Johannes Walther Birnbaum. Über eine neue Versuchsanordnung zur Prüfung der menschlichen Hörschärfe für reine Töne beliebiger Höhe . . . . .	201

*Ausgegeben am 22. Februar 1916.*

## Drittes Heft.

	Seite
1. W. Kossel. Über Molekülbildung als Frage des Atombaus . . .	229
2. Max B. Weinstein. Zur Strahlungstheorie . . . . .	363

*Ausgegeben am 7. März 1916.*

## Viertes Heft.

1. Einar Friman. Über die Absorption und Diffusion schneller Kathodenstrahlen ( $\beta$ -Strahlen) in Gasen und Dämpfen . . . .	373
2. V. Posejpal. Über die Verwendung eines Spektrophotometers in Verbindung mit dem Jaminschen Refraktometer . . . . .	419
3. Gustav Schweikert. Nachtrag zu der Arbeit: „Bestimmung der Schallgeschwindigkeit und des Verhältnisses der spezifischen Wärmen der Gase nach der Methode der Kundtschen Staubfiguren“ . . . . .	483
4. The Svedberg. Über die Elektrizitätsleitung in anisotropen Flüssigkeiten . . . . .	437
5. C. Zakrzewski. Bemerkung zu der Abhandlung des Hrn. George Jaffé u. d. T.: „Zur Theorie der Lichtabsorption in Metallen und Nichtleitern“ . . . . .	456
6. F. A. Schulze und H. Rathjen. Das Verhältnis der spezifischen Wärmen $\kappa = c_p/c_v$ von Stickstoff . . . . .	457
7. H. Seemann. Röntgenspektroskopische Methoden ohne Spalt	470

*Ausgegeben am 24. März 1916.*

## Fünftes Heft.

1. A. Weißenberger. Über die Thermokraft und Elektrizitätsleitung variabler Leiter. Beiträge zur Elektronentheorie . .	491
2. Béla Pogány. Über spezifischen Widerstand und optische Konstanten dünner Metallschichten . . . . .	531
3. F. A. Schulze. Über eine Zustandsgleichung für Luft, geprüft an Messungen des Verhältnisses der spezifischen Wärmen sowie der spezifischen Wärmen selbst . . . . .	569
4. F. A. Schulze. Die „Umkehrkurve“ des Joule-Thomson-Effektes für Luft . . . . .	585
5. E. von Schweidler. Über radioaktive Schwankungen bei Verwendung nicht gesättigter Ströme; Bemerkungen zu der gleichbetiteltten Arbeit des Hrn. A. Ernst . . . . .	594



	Seite
6. H. Dember. Über die Bestimmung der Loschmidtschen Zahl aus Extinktionskoeffizienten des kurzwelligen Sonnenlichts mit Hilfe eines lichtelektrischen Spektralphotometers . . .	599
7. Manne Siegbahn und Einar Friman. Über die Hochfrequenzspektren der Elemente As-Rh . . .	611
8. Manne Siegbahn und Einar Friman. Über die Hochfrequenzspektren (L-Reihe) der Elemente Tantal bis Wismut . .	616

*Ausgegeben am 11. April 1916.*

### Sechstes Heft.

1. Ernst Wagner. Über vergleichende Raumgittermessungen an Steinsalz und Sylvit mittels homogener Röntgenstrahlen und über deren exakte Wellenlängenbestimmung. (Hierzu Taf. I u. II)	625
2. Walter König. Über das Mitschwingen kleiner Körper in Schallwellen . . .	648
3. Adolf Heydweiller und Otto Grube †. Über physikalische Eigenschaften von Lösungen in ihrem Zusammenhang. V. Ultraviolette Dispersion von Salzen in Wasser . . .	653
4. A. Lauth. Elementare Ableitung der Geschwindigkeit von Kreis- und Schraubenwirbeln . . .	671
5. F. A. Schulze. Die Übereinstimmung der als Reflexionstöne oder Pfundlersche Töne bezeichneten Klangerscheinungen mit der Helmholtzschen Resonanztheorie des Hörens . . .	683
6. A. March. Zur Elektronentheorie der Metalle . . .	710
7. W. Mandersloot. Das Emissionsspektrum zweiatomiger Verbindungsgase im ferneren Ultrarot . . .	725
8. J. Stark. Beobachtungen über den zeitlichen Verlauf der Lichtemission in Spektralserien. (Hierzu Tafel III u. IV) . .	731

*Ausgegeben am 5. Mai 1916.*

### Siebentes Heft.

1. A. Einstein. Die Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie	769
2. Otto Stern. Die Entropie fester Lösungen . . .	823
3. W. Wien. Die elektrodynamische Spaltung der Serienlinien des Wasserstoffs. (Hierzu Tafel V) . . .	842
4. R. v. Hirsch. Versuche über das Leuchten der Wasserstoff-Kanalstrahlen. (Hierzu Tafel VI—IX) . . .	851
5. H. Lüssem. Untersuchungen am Lithiumspektrum im elektrischen Felde . . .	865

*Ausgegeben am 11. Mai 1916.*

## Achstes Heft.

	Seite
1. D. Konstantinowsky. Kriterien zur Existenz einer Atomistik der Elektrizität; zur Erscheinung des photoelektrischen Effektes. Erwiderung auf die Antwort E. Meyers u. W. Gerlachs . . .	881
2. H. Zahn. Über den Nachweis elektromagnetischer Wellen an dielektrischen Drähten . . . . .	907
3. Clemens Schaefer. Die träge Masse schnell bewegter Elektronen. (Ergänzungen zu der gleichnamigen Arbeit des Herrn G. Neumann) . . . . .	934
4. Wilhelm Frey. Potentialmessungen im elektrischen Nickellichtbogen. (Hierzu Tafel X) . . . . .	937
5. Th. Wereide. Die statistisch-mechanische Grundlage der allgemeinen Quantentheorie . . . . .	966
6. Th. Wereide. Der Energieaustausch zwischen Materie und Äther . . . . .	976

*Ausgegeben am 23. Mai 1916.*

### Nachweis zu den Figurentafeln.

---

Tafel I und II.	E. Wagner.
„ III „ IV.	J. Stark.
„ V.	W. Wien.
„ VI bis IX.	R. v. Hirsch.
„ X.	W. Frey.

---

# ANNALEN DER PHYSIK.

## VIERTE FOLGE. BAND 49.

### 1. Zur Begründung der Kristalloptik; von P. P. Ewald.

#### Einleitung zu Teil I (Dispersionstheorie) und Teil II (Theorie der Reflexion und Brechung).

Das Problem, die Kristalloptik aus der Strukturtheorie der Kristalle zu begründen, habe ich in meiner Dissertation 1912 behandelt. Die mir damals gestellte Aufgabe war, zu untersuchen, ob die Anordnung von Dipolen, wie sie seit Drude zur Erklärung der Dispersion benutzt werden, in einem rhombischen Gitter hinreicht — als einfachstes Bild eines doppelbrechenden Kristalls —, um optische Doppelbrechung zu erzeugen; ferner ob die Doppelbrechung, bei plausiblen Annahmen über die Verschiedenheit der drei Achsenlängen, von einer der beobachteten vergleichbaren Größenordnung sei. Es sei daran erinnert, daß diese Fragen gestellt wurden, bevor überhaupt durch Laues und seiner Mitarbeiter Versuche über die Interferenz der Röntgenstrahlen mit Sicherheit die Gültigkeit der Strukturtheorie der Kristalle entschieden war, und daß gehofft werden konnte, in der Dispersion ein Argument für die Strukturtheorie zu finden.

Das Resultat der Dissertation ist, daß ein Gitter mit nicht extremen Achsenverhältnissen in der Tat allein durch die Ungleichheit der Abstände der Dipole in den verschiedenen Richtungen Anlaß gibt zu einer starken Doppelbrechung; daß ferner das Gesetz, das Brechungsindex mit Fortschreitungsrichtung der Welle verbindet (Normalenfläche), das richtige ist. Das einfache Bild des Kristalls ist also vom Standpunkt der Optik aus richtig.

Daß bei dem numerisch durchgerechneten Gitter mit den Achsenabschnitten wie bei Anhydrit eine andere als die beobachtete Doppelbrechung gefunden wurde, wurde schon damals in Zusammenhang damit gebracht, daß der Kristall in Wirklichkeit nicht aus einem, sondern aus vielen einfachen Gittern

des der Rechnung zugrunde gelegten Typus besteht — eine Tatsache, an der nach den Offenbarungen über Kristallaufbau, die wir den Röntgenstrahlen verdanken, nicht zu zweifeln ist.

Auch heute läßt sich noch nicht entscheiden, ob die Doppelbrechung in manchen Fällen allein durch die Anisotropie der *Lage* hervorgerufen wird, oder ob stets noch eine Anisotropie der *Bindung* hinzukommt, d. h. eine nach den drei Hauptrichtungen ungleiche rücktreibende Kraft. Es fehlt zurzeit noch an einem doppelbrechenden Kristall von einfachem chemischem Aufbau, dessen Struktur aus Röntgenuntersuchungen bekannt ist und dessen auf Grund der Lage allein zu erwartende Doppelbrechung sich nach den in der Dissertation gebrauchten Methoden berechnen läßt. Durch Vergleich mit der Erfahrung werden sich Fälschschlüsse auf die Anisotropie der Bindung und damit auf die inneren Kräfte des Kristalls ergeben. Schwefel wird ein geeignetes Beispiel sein, sobald seine Struktur ganz bekannt ist. Der auf numerische Rechnung abzielende Teil ist gekürzt worden.

Während das Hauptinteresse bei der Fragestellung, wie geschildert, in der Doppelbrechung, ihrer Größe und ihrem Zustandekommen lag, ergab sich bald, daß die Behandlung auch vom Standpunkte der Dispersionstheorie aus manches neue bot. Die genau gegebenen Lagen der Dipole ermöglichten eine strengere Rechnungsart, als früher bei der Behandlung der Dispersion isotroper Körper unter Bildung von Mittelwerten möglich war, und kleine begriffliche Unklarheiten traten hier, die Aufmerksamkeit erzwingend, hervor. Es ist dies einmal die Frage, wie eigentlich — im unendlich ausgedehnt gedachten Kristall — die von den einzelnen Dipolen ausgehenden Felder zu summieren sind; also eine Konvergenzfrage, die aber im endlichen Kristall ihren physikalischen Sinn beibehält.

Ein zweiter neuer Gesichtspunkt, wenigstens gegenüber der Planckschen und der Lorentzschen Theorie, bestand in dem Fortlassen der „einfallenden Welle“. Bei Planck wie bei Lorentz wird der einzelne Dipol durch eine elektrische Kraft erregt, die sich aus zwei Teilen zusammensetzt: dem was „von außen“ einfällt ( $\mathcal{E}_0$ ) und dem, was dem Dipol von den anderen Dipolen des Körpers zugestrahlt wird. Der erste

Teil  $\mathcal{E}_0$  hatte keinen Platz in der Theorie des unbegrenzten Kristalls. Allein die gegenseitige Zustrahlung unterhielt die Dipolschwingungen, so daß der ganze Schwingungszustand des Kristalls wie eine Art von freier Schwingung aufzufassen ist, ohne äußere erzwingende Kräfte. Als Grund für das Fortlassen der äußeren Anregung  $\mathcal{E}_0$  wurde die Idealisierung des Problems angegeben, die darin liegt, daß ein unbegrenzter Kristall betrachtet wird, und es wurde die Behauptung aufgestellt, daß dem Rande des begrenzten Kristalles die Rolle zufallen müsse, die einfallende Welle  $\mathcal{E}_0$  für das ganze Innere des Kristalles zu kompensieren. So allein war zu begreifen, daß im unbegrenzten Kristall von der äußeren Anregung nichts zu spüren sein sollte.

In dieser Behauptung lag das Eingeständnis, daß zu einem vollkommenen Verständnis der Dispersionstheorie die Behandlung der Reflexion und Brechung, also der Vorgänge in der Grenzschicht des Körpers, unumgänglich notwendig sei. Diesem Mangel will der zweite Teil der vorliegenden Arbeit abhelfen, der somit neu ist.<sup>1)</sup> Er behandelt folgendes Problem:

Gegeben sei ein begrenzter Kristall — der etwa den ganzen oberen Halbraum erfülle mit Grenzfläche  $z = 0$ ; von unten falle unter beliebigem Winkel eine ebene Welle  $\mathcal{E}_0$  auf. Welches ist die Schwingungsweise der Dipole und entstehen durch ihre Schwingungen gebrochene und reflektierte Wellen — also die Fresnelschen Formeln; ist endlich von dem vermuteten Einfluß des Randes etwas zu spüren?

Dieses Problem des berandeten Kristalls erscheint von vornherein bedeutend schwieriger, als das des unbegrenzten. In der Tat bildet der in der Dissertation aufgefundene Schwingungszustand mit seinen Anklängen an die freie Schwingung eines mechanischen Systems die Vorstufe, mit deren Hilfe die Behandlung des begrenzten Körpers gelingt. Gerade dadurch, daß die Randschicht das Innere des Kristalles gegen das Eindringen der äußeren Welle abschirmt, kommt es nämlich, daß im Innern vom Rande ab die Schwingungsweise

<sup>1)</sup> *Anm. bei der Korrektur:* Kürzlich hat Herr C. W. Oseen in anderem Zusammenhange auf die Notwendigkeit hingewiesen, die Dispersionstheorie in dem hier durchgeführten Sinne zu ergänzen, Physikal. Zeitschr. 16. p. 404. 1915.

herrscht, als gäbe es weder einen Rand, noch die einfallende Welle. Diese Schwingungsweise ist uns aber in der Grundlösung des unbegrenzten Kristalles bekannt, und so wird mit kleiner Mühe der begrenzte Körper auf den bekannten unbegrenzten zurückgeführt.

Wenn soweit der zweite Teil dieser Arbeit als Fortsetzung des Problems der Dissertation und im besondern als Beweis für eine dort aufgestellte Behauptung gelten kann, so wird in ihm ferner auf einen Punkt näher eingegangen, der früher nicht behandelt worden ist. Dies ist der Übergang von dem genauen mikroskopischen Feld, das zwischen den Dipolen herrscht, zu dem makroskopischen gemittelten Feld, das in der phänomenologischen Theorie zur Behandlung der Reflexion und Brechung dient, und dessen Amplituden in den Fresnelschen Formeln festgelegt sind. Bei diesen handelt es sich um den Vergleich der Feldstärken außerhalb und innerhalb des Kristalles und man hat daher genau auf den Zusammenhang des errechneten mikroskopischen im freien Äther zwischen den Dipolen des Körpers geltenden Feldes mit den Maxwell'schen Größen  $\mathcal{E}$  und  $\mathcal{D}$  im Körper einzugehen. Beim reinen Problem der Dispersion, wo es sich nur um die Ermittlung der Phasengeschwindigkeit handelt, mit der irgendeine der Größen  $\mathcal{E}$ ,  $\mathcal{D}$  oder  $\mathcal{H}$  fortschreitet, fällt die Notwendigkeit fort, zwischen  $\mathcal{E}$  und  $\mathcal{D}$  zu unterscheiden, und die Dissertation konnte ihr Ergebnis allein dem Vektorpotential entnehmen, ohne überhaupt in diesem Zusammenhang die Feldstärken zu beachten. Bei den Fresnelschen Formeln aber muß dies besprochen werden. Der § 5 des II. Teils gehört dem Inhalt nach eigentlich ebensosehr zum I. Teil (Dispersion) wie zur Theorie der Brechung, wurde aber dort gelassen, um die für die reine Aufgabe der Dispersionstheorie notwendigen Gedankengänge nicht zu unterbrechen.

Schließlich sei erwähnt, daß auch das Verhalten des Kristalles ganz kurzen Wellen (Röntgenstrahlen) gegenüber in der strengen Rechnung mit einbegriffen ist, wovon der letzte Paragraph (§ 7) handelt. Besonders gut läßt sich der Übergang vom Fall der Röntgenwellen mit den zahlreichen Interferenzstrahlen zu den optischen Wellen mit den drei einzigen Wellen (einfallend, gebrochen, reflektiert) verfolgen.

Teil I: Theorie der Dispersion.<sup>1)</sup>

## § 1. Fragestellung.

1. Gegeben sei ein einfaches rhombisches Gitter, dessen Gitterpunkte die rechtwinkligen Koordinaten

$$X = 2al; \quad Y = 2bm; \quad Z = 2cn$$

( $l, m, n$  ganzzahlig von  $-\infty$  bis  $+\infty$ )

haben. An diese Gitterpunkte sind Elektronen quasi-elastisch und isotrop gebunden; das letztere soll heißen, daß die vom Gitterpunkt auf das Elektron ausgeübte Kraft nur von der Größe, nicht von der Richtung der Elongation abhängt. Mit welcher Geschwindigkeit und welcher Dämpfung kann sich eine ebene Welle von gegebener Frequenz in diesem Medium fortpflanzen?

2. Zunächst sei darauf hingewiesen, daß die schwingenden Elektronen für die Rechnung in bekannter Weise durch Dipole ersetzt werden, indem die Ladungen  $+e$  und  $-e$ , die sich kompensieren, in den Gitterpunkten hinzugedacht werden.  $+e$  bildet mit dem verschobenen Elektron zusammen den Dipol, während das statische Feld der in den Gitterpunkten ruhenden Ladungen  $-e$  hier nicht interessiert.

Beschreibt man eine ebene Welle durch die Formel

$$\mathcal{E} = \Re(E e^{-int + ikz}),$$

wo  $E$  eine Amplitude,  $n$  Frequenz und  $s$  die im Sinne der Wellennormalen gezählte laufende Koordinate ist, so sind die gesuchten Größen der Phasengeschwindigkeit und Dämpfung in der Konstante  $k$  enthalten, deren reeller Teil  $k_1$  die Phasengeschwindigkeit  $q = n/k_1$  gibt, während der imaginäre Teil  $k_2$  die Dämpfung verursacht.

Es wird nun der Ansatz gemacht, daß die Ebenen senkrecht zu  $s$  Ebenen gleicher Dipolphase sind. Dabei bleibt die Geschwindigkeit  $q$ , mit welcher sich die Phase über das Gitter hinwegbewegt, zunächst unbestimmt. Man zeigt nun durch Übereinanderlagern der von den Dipolen ausgehenden Einzelfelder, daß infolge des Ansatzes für die (diskreten) Dipolschwingungen auch die (kontinuierlichen) Feldgrößen die Form einer ebenen Welle annehmen, und daß Geschwindig-

1) Gekürzte Dissertation München 1912. Ich möchte es nicht unterlassen, auch an dieser Stelle Hrn. Prof. Sommerfeld für die Anregung und Unterstützung dieser Arbeit meinen herzlichen Dank auszusprechen

keit und Dämpfung bei beiden Wellen — dem Felde und der Dipolanregung — identisch sind. Um diese Größen selbst, die sich in der komplexen Konstanten  $k$  zusammenfassen lassen, zu bestimmen, muß auf die *dynamische Möglichkeit* des Ansatzes eingegangen werden. Es ist nämlich zu verlangen, daß jeder Dipol von dem ihm zugestrahlten Felde zu seinen Schwingungen erregt wird. Diese Forderung kann bei jeder Frequenz durch passende Wahl der verfügbaren Konstanten  $k$  erfüllt werden und liefert den Zusammenhang zwischen Frequenz und Phasengeschwindigkeit, d. h. die Dispersionsformel.

### § 2. Gang der Rechnung.

Seien  $XYZ$  die Koordinaten eines Dipols,  $xyz$  die laufenden Koordinaten des Aufpunktes; sei ferner

$$S = X \cos(s, x) + Y \cos(s, y) + Z \cos(s, z)$$

der Abstand eines Dipols von der durch den Koordinatenanfangspunkt gehenden Ebene gleicher Dipolphase;  $q$  die (unbestimmte) Geschwindigkeit der Dipolphase,  $n$  die Frequenz, welche in dem Faktor  $e^{-int}$  den zeitlich periodischen Verlauf regelt, so daß

$$e^{-in/q \cdot s}$$

der Phasenfaktor der in der Richtung  $-S$  sich fortpflanzenden Dipolanregung ist.

Die *Einzelanregung*, die ein Dipol von der Ladung  $\pm e$  aussendet, ist dann durch den *Hertzschen Vektor*

$$(1) \quad \mathfrak{H} \cdot e^{-int} = e a \cdot \frac{1}{R} \cdot e^{-in \left( t - \frac{R}{c} + \frac{S}{q} \right)}$$

charakterisiert, in welchem  $R = [(X-x)^2 + (Y-y)^2 + (Z-z)^2]^{\frac{1}{2}}$  den Abstand Dipol - Aufpunkt bedeutet. Der Term  $R/c$  im Exponenten besagt, daß das Feld des Dipols sich mit der gleichen Geschwindigkeit  $c$  wie im reinen Äther zum Aufpunkt hin fortpflanzen soll.

Indem wir den allen Dipolen gemeinsamen Faktor  $e^{-int}$  fortlassen und

$$(2) \quad \frac{n}{c} = k_0, \quad \frac{n}{q} = k$$

einführen, schreiben wir den für uns wichtigen Teil des Hertzschen Vektors:

$$(3) \quad \mathfrak{H} = e a \cdot \frac{1}{R} \cdot e^{ik_0 R - ik S},$$



und erinnern daran, daß im Medium von der Dielektrizitätskonstante 1 die elektrische Feldstärke  $\mathfrak{E}$  und die magnetische  $\mathfrak{H}$  gewonnen werden durch die Operationen

$$(4) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{E} = \text{rot rot } \mathfrak{P}; \quad \mathfrak{H} = \frac{1}{c} \text{rot } \mathfrak{P} \\ \quad = \text{grad div } \mathfrak{P} - \Delta \mathfrak{P}. \end{array} \right.$$

Statt  $\Delta \mathfrak{P}$  kann vermöge der außerhalb der Elektronen geltenden Ausbreitungsgleichung

$$(5) \quad \Delta \mathfrak{P} + k_0^2 \mathfrak{P} = 0$$

auch  $-k_0^2 \mathfrak{P}$  eingesetzt werden.

Das Gesamtfeld ist dann gegeben durch das Potential

$$(6) \quad \Sigma \mathfrak{P} = e a \Sigma \frac{e^{i k_0 R - i k S}}{R} = e a II,$$

die Summe erstreckt über alle Dipole des Gitters. Das Gesamtpotential wird bei jedem Dipol unendlich wie  $1/R$  und ist also, da in festen Körpern auf die Wellenlänge des Lichtes viele hundert Moleküle entfallen, ein räumlich äußerst schnell wechselndes Feld, aus welchem das beobachtbare optische Feld nur die großzügige „Dünnung“ darstellt, die durch Mittelung gewonnen wird.

Das gemittelte optische Feld ist nicht etwa maßgebend für die Schwingungen der einzelnen Dipole. Diese werden vielmehr durch das „erregende Feld“ veranlaßt, das wir

$$(7) \quad e a II' = \Sigma' \mathfrak{P}$$

schreiben, wobei der Akzent bedeutet, daß über alle Dipole mit Ausnahme des gerade betrachteten, zu erregenden Dipols summiert werden soll. Das erregende Feld ist somit gleich dem Gesamtfeld vermindert um den Anteil, der vom „Aufdipol“ herrührt. Für die Schwingung gilt dann [nach (4)] die Gleichung

$$(8) \quad \left\{ \begin{array}{l} m \ddot{\mathfrak{p}} + g \dot{\mathfrak{p}} + f \mathfrak{p} = e \mathfrak{E} \\ \quad = e^2 \text{rot rot } (a II' \cdot e^{-i n t}). \end{array} \right.$$

Hierbei ist

$$\mathfrak{p} = a \cdot e^{-i n t}$$

die Elongation,  $m$  Masse,  $e$  Ladung,  $f$  quasielastische Kraft,  $g$  Reibungskoeffizient; führt man die Eigenfrequenz

$$n_0^2 = \frac{f}{m}$$

ein, so verlangt also diese Gleichung:

$$\alpha \left( -n^2 + n_0^2 - i n \frac{g}{m} \right) = \frac{e^2}{m} \text{rotrot } \alpha \Pi'.$$

Setzen wir zur Abkürzung

$$(9) \quad \frac{m}{e^2} \left( n_0^2 - n^2 - i n \frac{g}{m} \right) = \Omega$$

und führen statt  $\text{rotrot}$  das äquivalente ( $\text{grad div} - \Delta$ ) ein, so muß sein

$$(10) \quad \alpha (\Omega + \Delta \Pi') = \text{grad div } \alpha \Pi'$$

oder in Komponenten (die Indizes am Potential  $\Pi'$  bedeuten Differentiationen, diejenigen an der Amplitude  $\alpha$  dagegen Komponenten):

$$(10a) \quad \begin{cases} \alpha_x (\Omega + \Delta \Pi' - \Pi'_{xx}) - \alpha_y \Pi'_{xy} - \alpha_z \Pi'_{xz} = 0 \\ -\alpha_x \Pi'_{xy} + \alpha_y (\Omega + \Delta \Pi' - \Pi'_{yy}) - \alpha_z \Pi'_{yz} = 0 \\ -\alpha_x \Pi'_{xz} - \alpha_y \Pi'_{yz} + \alpha_z (\Omega + \Delta \Pi' - \Pi'_{zz}) = 0. \end{cases}$$

Die Bedingung, daß diese drei homogenen Gleichungen gleichzeitig erfüllt werden, ist:

$$(11) \quad \begin{vmatrix} \Omega + \Delta \Pi' - \Pi'_{xx} & -\Pi'_{xy} & -\Pi'_{xz} \\ -\Pi'_{xy} & \Omega + \Delta \Pi' - \Pi'_{yy} & -\Pi'_{yz} \\ -\Pi'_{xz} & -\Pi'_{yz} & \Omega + \Delta \Pi' - \Pi'_{zz} \end{vmatrix} = 0.$$

Die  $\Pi'$ ... hängen ab von der Konstanten  $k$  der Dipolphase, welche identisch ist mit der für die Ausbreitung des optischen Feldes maßgebenden Größe. Daher stellt die Determinante (11) die Verbindung her zwischen dem Brechungsindex

$$(12) \quad \nu = \frac{c}{q} = \frac{k}{k_0}$$

und der Größe  $\Omega$ , welche Elektronenkonstanten und Frequenz der optischen Welle enthält (Dispersionsgesetz).

Die Hauptbrechungsindizes des rhombischen Gitters erhalten wir, indem wir die Dipolschwingung ganz in die Richtung einer der drei Achsen legen; da dies für jede Achse mit zwei ausgezeichneten Fortpflanzungsrichtungen der optischen Welle möglich ist, erhalten wir zunächst sechs Hauptbrechungsindizes, die außer vom Polarisationszustand auch von der Richtung der Wellennormale  $s$  abhängen:

Schwingung  $a = a_x$ , Ausbreitung längs  $z$ :  $k_{xz}$ ,  $v_{xz}$

. . .

$y$ :  $k_{xy}$ ,  $v_{xy}$

$a = a_y$

$x$ :  $k_{yx}$ ,  $v_{yx}$

. . .

$z$ :  $k_{yz}$ ,  $v_{yz}$

$a = a_z$

$x$ :  $k_{zx}$ ,  $v_{zx}$

. . .

$y$ :  $k_{zy}$ ,  $v_{zy}$ .

Hierin liegt eine Abweichung des Gitters von den wirklichen Kristallen, bei denen nur drei Hauptbrechungsindizes beobachtet sind, und wir wollen uns die Entstehung der sechs Indizes noch direkter klar machen.

Die Dipolamplitude möge mit der Richtung der  $x$ -Achse zusammenfallen; dann gibt es zwei ausgezeichnete Fälle, über die Ebenen konstanter Dipolphase zu verfügen (vgl. Fig. 1):

1. Phasenebene ist die  $xy$ -Ebene (Ausbreitung längs  $z$ )

2. Phasenebene ist die  $xz$ -Ebene (Ausbreitung längs  $y$ ).

Wegen der Verschiedenheit der  $y$ - und  $z$ -Richtung beim rhombischen Gitter ergeben diese beiden Fälle zwei verschiedene erregende Felder und es sind im ganzen wirklich sechs Hauptbrechungsindizes vorhanden.

Es ist aber ohne weitere Rechnung klar, daß der Unterschied der beiden Brechungsindizes  $v_{xy}$  und  $v_{xz}$  sehr klein ist. Denn er entsteht nur dadurch, daß einmal die in der  $y$ -Richtung gelegenen Nachbarn eines Aufdipols den Phasenunterschied gegen diesen haben, daß andere Mal die nach der  $z$ -Richtung gelegenen Nachbarn. Da der Phasenunterschied wegen der Länge der optischen Welle selbst klein ist, so ist es erst recht der durch die Differenz der Unterschiede hervorgerufene Effekt.

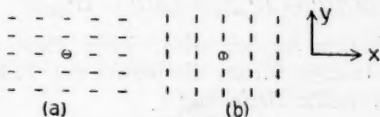


Fig. 1.

Man wird sich also damit begnügen können, später die drei Hauptbrechungsindizes  $v_x$ ,  $v_y$ ,  $v_z$  zu unterscheiden, die für die drei Schwingungsrichtungen  $a_x$ ,  $a_y$ ,  $a_z$  gelten. Ihr Unterschied ist die eigentliche Doppelbrechung. Er ist bedeutend größer als der vorhergehende Unterschied, da er nicht wesentlich von der Wellenlänge abhängt. Fig. 1a zeigt die nach der

$x$ -Richtung ausschwingenden Dipole, Fig. 1b das gleiche Gitter mit Schwingungen nach  $y$ . Wegen der physikalischen Bedeutung des Unterschiedes von  $\nu_{xy}$  und  $\nu_{xz}$  (optisches Drehungsvermögen) vgl. den Schluß von § 4.

Bei der Berechnung der Hauptbrechungsindizes (Ausbreitung längs einer, Schwingung in einer anderen Achse) behält das Gitter die drei Koordinatenebenen als Symmetrieebenen und deshalb sind an den Gitterpunkten die Differentialquotienten  $\Pi'_{xy} = \Pi'_{xz} = \Pi'_{yz} = 0$ ; die Determinante reduziert sich auf die Diagonalglieder und man hat nach (10a) zur Bestimmung von  $\nu_{xz}$  die Gleichung

$$(13) \quad \Omega + (\Delta\Pi' - \Pi'_{xx})_z = 0.$$

Der Index  $z$  soll daran erinnern, daß die für Ausbreitung längs  $z$  spezialisierten Formeln genommen werden müssen, um  $\nu_{xz}$  zu finden. In dieser Gleichung enthalten die zweiten Ableitungen des Potentials — wie die Annäherungen zeigen — nur das Verhältnis  $k/k_0 = \nu$ , das die Frequenz  $n$  nicht enthält; diese kommt nur in der Elektronenkonstanten  $\Omega$  vor.

Eliminiert man also aus (13) und der analogen Gleichung für  $\nu_{yz}$

$$(13a) \quad \Omega + (\Delta\Pi' - \Pi'_{yy})_z = 0$$

die Elektronenkonstante  $\Omega$ , so erhält man eine implizite Beziehung zwischen den zwei Hauptbrechungsindizes  $\nu_{xz}$  und  $\nu_{yz}$ , welche unabhängig ist von der Frequenz  $n$ , ferner von der Anzahl und Art der schwingenden Dipole und die allein abhängt von der Struktur:

$$(14) \quad (\Delta\Pi' - \Pi'_{xz})_z = (\Delta\Pi' - \Pi'_{yz})_z.$$

Wie sich weiterhin ergeben wird, liefert diese Gleichung im Fall des rhombischen Gitters die bereits von T. H. Havelock (vgl. § 4) aufgestellte Beziehung

$$\frac{1}{\nu_x^2 - 1} - \frac{1}{\nu_y^2 - 1} = \text{Konst.} = D_{xy},$$

deren Unabhängigkeit von der Wellenlänge Havelock bei einigen Kristallen bestätigt fand. Die Berechnung von  $\Pi'_{xz}$  und  $\Pi'_{yz}$  setzt uns in die Lage, die Größe dieses Maßes  $D$  der strukturellen Doppelbrechung aus gegebenen Achsenverhältnissen abzuleiten.

## § 3. Prinzipielles zu Ansatz und Rechnung.

Die Summation der Einzelpotentiale

$$(1) \quad a \frac{e}{R} e^{i(k_0 R - k S)}$$

die im vorigen Paragraphen sowohl zur Berechnung des optischen Feldes, als für das „erregende Feld“ gefordert wird, hat bei reellen Werten von  $k_0 = n/c$  und  $k = n/q$  keinen eindeutigen Sinn. Die Abnahme der Summenglieder wie  $1/R$  reicht infolge des oszillierenden Faktors im Zähler zwar hin, um einen endlichen Wert der Summe zu ermöglichen, doch ist dieser Wert unbestimmt und von der Art der Ausführung der Summation abhängig, weil die Konvergenz der Reihe „bedingt“ ist. Um zu einem eindeutigen Resultat zu gelangen, müssen daher die Betrachtungen des vorigen Paragraphen ergänzt werden durch eine Summationsvorschrift, die aus der Natur des physikalischen Problems zu schöpfen ist.

Man ist zunächst aller Konvergenzschwierigkeiten enthoben, wenn man ein endliches Stück Kristall betrachtet, das aus der großen Zahl von  $N$  Dipolen besteht. Fällt auf diesen Kristall eine Lichtwelle auf, so geraten die Dipole in Schwingungen und erzeugen, zusammen mit der einfallenden Welle  $\mathcal{E}_0$ , im Körperinnern ein elektrisches Feld. Dieses seinerseits bestimmt ja die Schwingungsweise, Ausbreitungsgeschwindigkeit usw., wie im vorigen Paragraphen gezeigt.

Bei dem endlichen Körper hängt nun dies Feld zweifellos wesentlich von der Begrenzung ab. Ist die Oberfläche, auf die der Einfall geschieht, eben, so entsteht die gebrochene Welle, ist sie gewellt, so werden Beugungsspektren der verschiedensten Ordnungen entstehen, wie ja überhaupt die ganzen Beugungserscheinungen an der Begrenzung des Körpers in der Lösung dieses Problems mit enthalten wären. Die Abhängigkeit von der Oberfläche erstreckt sich durch das ganze Körperinnere.

Offenbar ist der Sinn des Problems der Dispersion beschränkter als die vorgeschlagene Aufgabe: gilt es doch nur, die Ausbreitungsgeschwindigkeit einer Welle zu bestimmen, also eine Materialkonstante, die von den äußeren Bedingungen (Begrenzung) unabhängig ist. Ihre Existenz allein weist darauf hin, daß der wesentliche Vorgang der Wellenausbreitung an

einer Stelle des Körpers bedingt wird durch die Umgebung dieser Stelle. Weder die Berandung noch die äußere Welle  $\mathfrak{E}_0$  können auf diesen Vorgang Einfluß haben — sonst müßte er von Ort zu Ort im Körper verschieden sein. Das Fortschreiten einer Welle im Körperinnern ist ein in sich dynamisch abgeschlossener Vorgang, der die Fähigkeit in sich trägt, wenn er in einem Teil des Körpers erregt ist, ohne Zutun äußerer Kräfte an andere Orte weiter zu wandern. Die Mannigfaltigkeit der Beugungserscheinungen am begrenzten Körper entsteht dadurch, daß der Rand den Körper zu zahlreichen Schwingungen anregt, die sich dann in der „dynamisch abgeschlossenen“ Art weiter entwickeln.

Gehen wir nun in der reinen Dispersionstheorie allein auf die Kenntnis der „dynamisch abgeschlossenen“ Schwingungsart aus, so müssen wir den Einfluß des Randes beseitigen. Wir haben, weil es sich um eine Materialkonstante handelt, nur den Einfluß der Umgebung der Stelle der Ausbreitung zu berücksichtigen. Daß die Umgebung sich allseitig über viele Wellenlängen erstrecken soll, tut für die Konvergenzfrage nichts zur Sache. Am einfachsten verfahren wir so, daß wir zum unendlichen Kristall zurückkehren, aber statt der überall gleichmäßig starken Dipolamplitude  $a$  eine in großen Entfernungen vom Aufpunkt allmählich abnehmende Amplitude

$$a e^{-\kappa R}$$

einführen. Ist  $\kappa \ll 1/\lambda$ , so ändert dies auf viele Wellenlängen Entfernung vom Aufpunkt nichts, erzwingt aber die Bestimmtheit des Problems und die unbedingte Konvergenz der Summe der Einzelpotentiale. Diese Summe wird jetzt geschrieben

$$\sum a e^{-\kappa R} \frac{e^{ik_0 R - ikS}}{R} = \sum a \frac{e^{ik_0' R - ikS}}{R},$$

und ist formal identisch mit der alten Summe, bis auf den Umstand, daß

$$k_0' = k_0 + i\kappa$$

den imaginären Teil  $\kappa$  hat.

Wenn es sich um einen absorbierenden Kristall handelt, bei dem eine (entgegen dem Strahl) exponentiell wachsende Amplitude anzusetzen ist ( $k = k_1 + ik_2$ ), so ist klar, daß

aus den eben dargelegten Gründen zur Erzielung der Bestimmtheit der Summe  $\kappa > k_2$  gewählt werden muß.  $\kappa = k_2$  würde entgegen der Strahlrichtung den Amplitudenzuwachs gerade kompensieren und die gleiche Unbestimmtheit wie im durchsichtigen Kristall mit  $\kappa = 0$  zurücklassen.

Im folgenden führen wir statt  $k_0'$  die Bezeichnung wieder ein:

$$k_0 = k_{01} + i k_{02},$$

wobei  $k_{02} (= \kappa) > k_2$  ist. Das Resultat der Summation, das einen bei der reellem  $k_0$  möglichen Werte der Summe darstellt, bleibt auch nach der Rückkehr zu reellem  $k_0$  der gesuchte vom Randeinfluß freie Summenwert.

2. Nach den letzten Ausführungen darf es nicht mehr erstaunen, daß im vorigen Paragraphen von der von außen einfallenden Welle  $\mathfrak{E}_0$  nicht die Rede war. Die Kräfte, die auf der rechten Seite der Schwingungsgleichung stehen, enthalten nur die von den andern Dipolen des Körpers zugestrahlten Felder, nicht wie bei Planck und H. A. Lorentz ein von der einfallenden Welle herrührendes Glied. Ein solches widerstrebt der Auffassung der Wellenausbreitung als eines „dynamisch abgeschlossenen“ Vorgangs. Die Unmöglichkeit der Existenz der ursprünglichen Welle  $\mathfrak{E}_0$  im Körperinnern wird zudem durch das Resultat der Summation der Einzelfelder dargetan: die angesetzten Dipolschwingungen erzeugen ein Feld, das für sich allein die Form einer ebenen mit der Geschwindigkeit  $q$  fortschreitenden Welle hat. Wäre diesem Feld noch das ursprüngliche Feld  $\mathfrak{E}_0$  zu überlagern, das sich in anderer Richtung und mit anderer Geschwindigkeit  $c$  fortbewegt, so könnten beide Felder sich im Innern nie zu einer ebenen Welle zusammensetzen.

Nach den unter 1. gegebenen Gesichtspunkten ist es klar, daß der Fortfall von  $\mathfrak{E}_0$  eine Wirkung des Randes sein muß. Bei der ebenen Begrenzung eines Körpers übernimmt der Rand die Aufgabe:

1. die einfallende Welle für das ganze Körperinnere zu kompensieren;
2. den „dynamisch abgeschlossenen“ Zustand der Ausbreitung der gebrochenen Welle einzuleiten;
3. im Außenraum die reflektierte Welle zu erzeugen.

Als handgreiflicher Beweis für die geforderte Wirkung des Randes läßt sich der schiefe Einfall eines begrenzten

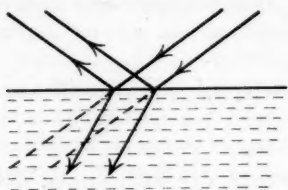


Fig. 2.

Strahles auf eine ebene Oberfläche auffassen. Ginge nicht von den beleuchteten Randgebieten eine ebene Welle von gleicher Richtung und Geschwindigkeit aber umgekehrter Phase aus, wie die auffallende Welle, so müßte ja eine optische Erregung auch in das zwischen den punktierten Strahlen liegende Gebiet gelangen (vgl. Fig. 2).

#### § 4. Verhältnis zu anderen Theorien.

Am nächsten steht diese Arbeit den Dispersionstheorien von Lorentz und Planck. Der Hauptunterschied liegt in der Behandlung, die für den isotropen Körper mit Mittelwerten, hier unter strenger Berücksichtigung der Lage der Dipole geschieht.

Über einen Unterschied des Ansatzes, nämlich den Verzicht auf die einfallende Welle  $\mathcal{E}_0$ , ist oben schon gesprochen worden. Es bleibt nur zu erwähnen, daß die Resultate der oben genannten Theorien in dieser Arbeit bestätigt werden, wenn die Ergebnisse für einen kubischen Kristall spezialisiert werden.

In der Berechnung der Doppelbrechung geht die Arbeit über die eben genannten hinaus und hängt mit einer Gruppe von Arbeiten von Lord Rayleigh<sup>1)</sup>, T. Havelock<sup>2)</sup>, N. Kasterin<sup>3)</sup> zusammen. Ihre Grundlage bildet Rayleighs Arbeit über die Eigenschaften eines Mediums, in dem „Hindernisse“, d. h. kleine Kugeln von abweichender Dielektrizitätskonstante, gitterartig verteilt sind. Nur das Potentialproblem wird behandelt. Havelock erhält hieraus eine Dispersionsformel, indem er die für das zusammengesetzte Medium gefundene Dielektrizitätskonstante als nach der Cauchyschen Formel von der Wellenlänge abhängig ansetzt.

1) Lord Rayleigh, Phil. Mag. **34**. 1892.

2) T. H. Havelock, Proc. Roy. Soc. London **77**. p. 170. 1906.

3) N. Kasterin, Lorentz-Jubelband, oder Versl. Acad. Wetensch. Amsterdam. p. 460. 1897/98.



Kasterin hingegen gelingt es mit ähnlichen Methoden, wie sie Rayleigh brauchte, für die Ausbreitungsgleichung  $\Delta u + k^2 u = 0$  die Lösung zu finden, welche die Grenzbedingungen an den Kugeloberflächen erfüllt und ebene Wellen darstellt. Es ist schade, daß diese hervorragende Arbeit nur auf akustische Probleme angewandt wurde.

Den Übergang von Kasterins Arbeit zu der vorliegenden bildet die Bemerkung<sup>1)</sup>, daß die Beeinflussung einer ebenen Welle durch ein kleines kugelförmiges Hindernis in erster Näherung ersetzt werden kann durch eine von dem Hindernis ausgehende Dipolkugelwelle.

Eine zweite Arbeit von Havelock<sup>2)</sup> behandelt die Doppelbrechung im Anschluß an den Gedanken der Planckschen Theorie, daß es in isotropen Körpern um jeden Aufdipol eine kugelförmige Höhlung gibt, derart, daß die in ihr gelegenen Moleküle den Aufdipol im Mittel nicht erregen. Nach Havelocks Auffassung gibt es im Kristall ein Ellipsoid, das die gleiche Eigenschaft hat. Die Doppelbrechung kann durch dessen Exzentrizität ausgedrückt werden, wird aber nicht in Verbindung mit meßbaren Größen gebracht. Havelock findet in dieser Arbeit die Beziehung  $D_{xy}$  (§ 2) zwischen den Doppelbrechungsindizes, welche von der Wellenlänge unabhängig sein soll.

Zu der gleichen Beziehung gelangt Langevin<sup>3)</sup> auf Grund der Annahme, daß jedes Molekül anisotrop sei, d. h. wenn es isoliert im Raum gedacht wird, drei verschiedene Eigenfrequenzen besitze. Wir zeigen in § 9, daß die qualitativen Resultate der Annahme anisotroper Moleküle die gleichen sein müssen, wie bei der Annahme einer Gitterstruktur.

*Anm.* Seit dem ursprünglichen Erscheinen dieser Arbeit ist das gleiche Problem auch von M. Born in seiner „Dynamik der Kristallgitter“ (Teubner, 1915) behandelt worden. Die mathematische Methode Borns schließt sich eng an die Darstellung an, die D. Hilbert dem gleichen Gegenstand in seiner Vorlesung über Optik 1913 gegeben hat, und die den Gedanken zur konsequenten Durchführung bringt, mathematische Entwicklungen der Potentiale nach Potenzen der kleinen Größen  $k_0, k, a, \beta, \gamma$

1) Vgl. P. Debye, Der Lichtdruck auf Kugeln. Diss. p. 50.

2) T. Havelock, Proc. Roy. Soc. London 80. p. 28. 1907.

3) P. Langevin, Sur les birefringences électrique et magnétique. Le Radium. 7. 1910.

vorzunehmen. Born behandelt das Problem in allgemeiner Fassung, nämlich für beliebige schiefwinklige und aus mehreren Elektronen(Ionen)-arten zusammengesetzte Gitter. Außerdem berücksichtigt er, daß die Ladungen nicht an raumfeste Gitterpunkte, sondern nur untereinander elastisch gebunden sind, und daß deshalb mechanische Schwingungszustände die elektrischen begleiten. Der in meiner Dissertation behandelte Fall ergibt sich aus den Bornschen Formeln, wenn ein rhombisches Gitter genommen wird, in dem alle einfachen Gitter, aus denen es aufgebaut ist, bis auf eines unendlich große Massen haben. Die eine übrig bleibende Gattung von Ladungen schwingt dann, als wäre sie an feste Punkte gebunden.

Die Ergebnisse, die Born selbst aus seiner Darstellung gezogen hat, gehen in einem Punkte bedeutend über die Ergebnisse dieser Arbeit hinaus: in der Erklärung des optischen Drehungsvermögens. Pflanzte sich ein Strahl längs der optischen Achse fort, so ist die Polarisationsrichtung und die Geschwindigkeit in erster Näherung voneinander unabhängig. Erst in dem zweiten Grad der Annäherung — demselben, der bei uns den Unterschied zwischen  $v_{xy}$  und  $v_{xx}$  ergeben würde — findet sich der gesuchte Zusammenhang, den man bekanntlich so aussprechen kann: zwei entgegengesetzt zirkular polarisierte Strahlen pflanzen sich mit ungleicher Geschwindigkeit fort.

Zahlenrechnungen im Sinne einer Entscheidung, welcher Anteil der Doppelbrechung dem Einfluß der Lage, welche dem der Lagerung zuzuschreiben sei, finden sich bei Born nicht.

Ich habe für die vorliegende Darstellung der Dispersionstheorie dem Hilbertschen Kolleg den Gedanken der konsequenten Reihenentwicklung nach  $k_0$  usw. an der Stelle entnommen, wo für ein kubisches Gitter die Übereinstimmung der Dispersionsformel mit der Lorentz-Planckschen gezeigt werden soll (§ 9).

### § 5. Mathematische Vorbereitungen.

Zur Ausführung der Summation der Einzelpotentiale erweisen sich zwei Darstellungen von

$$\frac{e^{ikR}}{R}$$

als besonders geeignet, da sie nicht die irrationale Größe  $R = (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}$ , sondern die Koordinaten quadratisch oder linear enthalten. Wir nennen die eine Darstellung das einfache, die andere das dreifache Integral.

#### I. Das einfache Integral.

Die Größe  $k^2$  liege in der komplexen Ebene unter dem Winkel  $2\varphi$  gegen die reelle Achse.

Dann konvergiert

$$(1) \quad \int e^{-\varepsilon^2 + \frac{k^2}{\varepsilon^2}} d\varepsilon,$$

wenn  $\varepsilon$  so geführt wird, daß für kleine bzw. große  $\varepsilon$  gilt:  $\Re\left(\frac{k^2}{\varepsilon^2}\right) < 0$ , bzw.  $\Re(\varepsilon^2) > 0$  ist. Dies ist z. B. der Fall, wenn  $\varepsilon$  innerhalb des Sektors  $-\pi/4 + \varphi$  und  $-\pi/4$  aus dem Nullpunkt austritt und in dieser Richtung geradlinig ins Unendliche läuft.

Der Wert des Integrales läßt sich leicht ermitteln (vgl. Riemann-Weber, d. part. Dgl. d. math. Physik I, 5. Auflage, p. 28):

$$(2) \quad \int e^{-\varepsilon^2 + \frac{k^2}{\varepsilon^2}} d\varepsilon = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{2ik}.$$

Setzen wir  $\varepsilon = R \cdot \eta$ , so wird der Integrationsweg nicht wesentlich verändert und es ist

$$\int e^{-R^2 \eta^2 + \frac{k^2}{R^2} \cdot \frac{1}{\eta^2}} d\eta = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{e^{2ik}}{R}.$$

Schreiben wir schließlich  $\frac{1}{2} k R$  für  $k$ , so erhalten wir das *ein-  
fache Integral*

$$(3) \quad \frac{e^{ikR}}{R} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{(0)}^{\infty} e^{-R^2 \varepsilon^2 + \frac{k^2}{4\varepsilon^2}} d\varepsilon,$$

dessen Weg, bis auf den Austritt aus dem Nullpunkt innerhalb des Winkels  $\varphi$  der Fig. 3 auf die reelle Achse gezogen werden kann (Fig. 3).

## II. Das dreifache Integral.

Um aus der obigen Darstellung (3), welche die Koordinatenquadrate  $R^2 = x^2 + y^2 + z^2$  enthält, eine Darstellung zu gewinnen, bei welcher der Exponent von  $e$  eine lineare Funktion von  $xyz$  ist, verfahren wir am einfachsten so:

Es ist

$$(4) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\lambda^2}{4\varepsilon^2} - i\lambda x} d\lambda = e^{-x^2 \varepsilon^2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left(\frac{\lambda}{2\varepsilon} + ix\varepsilon\right)^2} d\lambda = 2\varepsilon e^{-x^2 \varepsilon^2} \cdot \sqrt{\pi}.$$

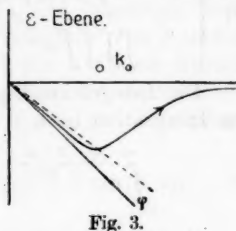


Fig. 3.

Ersetzen wir in (3)  $e^{-x^2 \varepsilon^2}$  durch das hieraus folgende Integral nach  $\lambda$  und ebenso  $e^{-y^2 \varepsilon^2}$  und  $e^{-z^2 \varepsilon^2}$  durch analoge Integrale nach Variablen  $\mu$  und  $\nu$ , so erhalten wir ein vierfaches Integral:

$$(5) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{e^{i k R}}{R} &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \left( \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \right)^3 \\ &\int \int \int \int e^{-\frac{\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2}{4\varepsilon^2} - i(\lambda x + \mu y + \nu z) + \frac{k^2}{4\varepsilon^2}} d\lambda d\mu d\nu \varepsilon^{-3} d\varepsilon. \end{aligned} \right.$$

Die Integrationsfolge darf hierbei vertauscht werden und die Integration nach  $\varepsilon$  kann ausgeführt werden:

$$(6) \quad \int_{(0)}^{\infty} e^{-\frac{k^2 - \lambda^2 - \mu^2 - \nu^2}{4\varepsilon^2}} \varepsilon^{-3} d\varepsilon = -\frac{2}{k^2 - \lambda^2 - \mu^2 - \nu^2}.$$

Es bleibt das dreifache Integral

$$(7) \quad \frac{e^{i k R}}{R} = -\frac{1}{2\pi^3} \int \int \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda x + i\mu y + i\nu z} \frac{d\lambda d\mu d\nu}{k^2 - \lambda^2 - \mu^2 - \nu^2};$$

dies Integral hat die gewünschte für die Summation äußerst bequeme Form.

Es sei bemerkt, daß die Substitution von  $-\lambda$ , .. an Stelle von  $+\lambda$ , .. nichts ändert außer dem Vorzeichen der Exponenten. Ist ferner  $R$  der Abstand des Punktes  $xyz$  vom Punkte  $XYZ$ , so gilt das allgemeinere Integral

$$(8) \quad \frac{e^{i k R}}{R} = -\frac{1}{2\pi^3} \int \int \int e^{\pm i\lambda(X-x) \pm i\mu(Y-y) \pm i\nu(Z-z)} \frac{d\lambda d\mu d\nu}{k^2 - \lambda^2 - \mu^2 - \nu^2}.$$

Schließlich sei bemerkt, daß die Integrationswege von der reellen Achse verschoben werden können, wobei aber nicht

$$k^2 - \lambda^2 - \mu^2 - \nu^2 = 0$$

werden darf. Insbesondere dürfen bei nicht verschwindendem imaginären Teil von  $k$  die drei Variablen auf identischen Wegen in kleinem Abstand über der reellen Achse (zwischen dieser Achse und dem Punkt  $k$ ) laufen.

#### § 6. Das Gesamtpotential und das optische Feld.

Um das Gesamtpotential des rhombischen Punktgitters zu bilden, haben wir, zunächst unter Benutzung des dreifachen Integrals [§ 5, (8)], die Einzelpotentiale

$$(1) \frac{e^{i(k_0 R - kS)}}{R} = - \frac{e^{-ikS}}{2\pi^2} \iiint \frac{e^{\pm i\lambda(X-x) \pm i\mu(Y-y) \pm i\nu(Z-z)}}{k_0^2 - \lambda^2 - \mu^2 - \nu^2} d\lambda d\mu d\nu$$

zu summieren.

Die Koordinaten der Gitterpunkte sind

$$X = 2al, \quad Y = 2bm, \quad Z = 2cn,$$

wo  $l, m, n$  alle ganzzahligen positiven und negativen Werte annehmen. ( $a, b, c$ ) sind die halben Abstände von Nachbarpunkten auf den Achsen und zugleich die Abstände benachbarter Symmetrieebenen des Systems.  $k_0$  ist die Ausbreitungskonstante der einzelnen Kugelwellen,  $k$  die der Dipolphase. Wir setzen

$$(2) \quad \begin{cases} kS = k(X \cos(S, x) + Y \cos(S, y) + Z \cos(S, z)) \\ \quad = \alpha X + \beta Y + \gamma Z; \end{cases}$$

dabei ist

$$(2a) \quad \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = k^2.$$

Das Gesamtpotential ist nun

$$(3) \quad \Pi = - \frac{1}{2\pi^2} \sum_{l, m, n}^{\dots} \iiint e^{2ial(\pm\lambda - \alpha) + 2ibm(\pm\mu - \beta) + 2icn(\pm\nu - \gamma)} \cdot e^{\mp i\lambda x \mp i\mu y \mp i\nu z} \frac{d\lambda d\mu d\nu}{k_0^2 - \lambda^2 - \mu^2 - \nu^2}.$$

Führen wir die Summation am Integranden aus, so zerfällt die dreifache Summe in das Produkt dreier einfacher geometrischer Reihen, von denen die erste heißt

$$\sum_{l=-\infty}^{+\infty} e^{2ial(\pm\lambda - \alpha) \mp i\lambda x}.$$

Die Konvergenz dieser Summe für positive und negative  $l$  kann dank der Unbestimmtheit des Vorzeichens von  $\lambda$  erreicht werden, sobald der imaginäre Teil  $k_{02}$  größer ist als  $k_2$  (vgl. § 3). In diesem Falle ist es nämlich möglich,  $\lambda$  auf einer über  $a$  gelegenen Parallelen zur reellen Achse laufen zu lassen, ebenso  $\mu$  über  $\beta$ ,  $\nu$  über  $\gamma$ <sup>1)</sup>, so daß also  $+\lambda - \alpha$  einen positiven imaginären Teil hat, was zur Konvergenz der Summe über positive  $l$  genügt. Die Summe über die negativen  $l$  konvergiert, wenn wir das Vorzeichen von  $\lambda$  umkehren.

1) Den Beweis findet man in der Dissertation Note 1.

Die Summation nach  $l$  ergibt demnach

$$\begin{aligned}
 (4) \quad \left\{ \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \dots = \sum_0^{-\infty} e^{2ial(\lambda-a)-i\lambda x} + \sum_{-1}^{-\infty} e^{-2ial(\lambda+a)+i\lambda x} \right. \\
 = \frac{e^{-i\lambda x}}{1 - e^{2ia(\lambda-a)}} + \frac{e^{+i\lambda x+2ia(\lambda+a)}}{1 - e^{2ia(\lambda+a)}} \\
 = \frac{e^{-i\lambda x}(1 - e^{2ia(\lambda+a)}) + e^{i\lambda x+2ia(\lambda+a)}(1 - e^{2ia(\lambda-a)})}{1 + e^{4ia\lambda} - 2\cos 2a\alpha e^{2ia\lambda}} \\
 = \frac{e^{-i\lambda(x+2a)} - e^{-i\lambda x+2ia\alpha} + e^{i\lambda x+2ia\alpha} - e^{i\lambda(x+2a)}}{2\cos 2a\lambda - 2\cos 2a\alpha} \\
 = -i \frac{\sin \lambda(x+2a) - e^{2ia\alpha} \sin \lambda x}{\cos 2a\lambda - \cos 2a\alpha}.
 \end{aligned}$$

Entsprechend gestalten sich die Summationen nach  $m$  und  $n$ .

Das Gesamtpotential ist also

$$(5) \quad \left\{ \Pi = -\frac{i}{2\pi^3} \iiint \frac{\sin \lambda(x+2a) - e^{2ia\alpha} \sin \lambda x}{\cos 2a\lambda - \cos 2a\alpha} \cdot \frac{\sin \mu(y+2b) - e^{2ib\beta} \sin \mu y}{\cos 2b\mu - \cos 2b\beta} \cdot \frac{\sin \nu(z+2c) - e^{2ic\gamma} \sin \nu z}{\cos 2c\nu - \cos 2c\gamma} \cdot \frac{d\lambda d\mu d\nu}{k_0^3 - \lambda^2 - \mu^2 - \nu^2}, \right.$$

wobei als Integrationswege für  $(\lambda\mu\nu)$  die Parallelen zur reellen Achse oberhalb von  $(a\beta\gamma)$  gelten (Weg 1, Fig. 4).

Aus den Integranden läßt sich ein Teil entfernen. Schreiben wir im  $\lambda$ -Integral

$$\begin{aligned}
 & \frac{\sin \lambda(x+2a) - e^{2ia\alpha} \sin \lambda x}{\cos 2a\lambda - \cos 2a\alpha} \\
 &= \frac{\sin \lambda x \cos 2a\lambda + \cos \lambda x \sin 2a\lambda - e^{2ia\alpha} \sin \lambda x}{\cos 2a\lambda - \cos 2a\alpha} \\
 &= \sin \lambda x + \frac{\cos \lambda x \sin 2a\lambda - i \sin \lambda x \sin 2a\alpha}{\cos 2a\lambda - \cos 2a\alpha},
 \end{aligned}$$

so hat der erste Term  $\sin \lambda x$  den Nenner, welcher Pole des Integranden bedingt, verloren. Wir können dann für diesen Teil des Integrals den Weg von  $\lambda$  auf die reelle Achse verschieben; da  $\sin \lambda x$  eine ungerade,  $k_0^2 - \lambda^2 - \mu^2 - \nu^2$  eine gerade Funktion von  $\lambda$  ist, ist das Integral Null und es bleibt übrig, wenn das gleiche für die  $\mu$ - und  $\nu$ -Integration vorgenommen wird:

$$(6) \quad \left\{ \begin{aligned} \Pi = -\frac{i}{2\pi^2} \iiint \frac{\cos \lambda x \sin 2a\lambda - i \sin \lambda x \sin 2a\alpha}{\cos 2a\lambda - \cos 2a\alpha} \dots \\ \dots \frac{d\lambda d\mu d\nu}{k_0^2 - \lambda^2 - \mu^2 - \nu^2} \end{aligned} \right.$$

Es ist bequem, von diesem Integral auf eine Summe überzugehen, indem man die Residuen an den Polen des Integranden bildet. Die Pole für die  $\lambda$ -Integration liegen bei

$$\cos 2a\lambda_0 = \cos 2a\alpha, \quad \lambda_0 = \frac{l\pi \pm a\alpha}{a},$$

wo  $l$  eine positive oder negative ganze Zahl. In der  $\lambda$ -Ebene liegen die Pole auf den beiden Parallelen zur reellen Achse, die durch die Punkte  $\pm a$  gehen (Fig. 4).

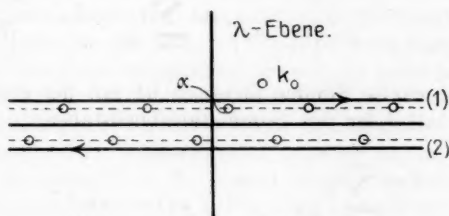


Fig. 4.

Beachten wir, daß der Integrand eine ungerade Funktion ist, so können wir bei der Substitution  $\lambda' = -\lambda$  den bisherigen Weg (1) (Fig. 4) von  $\lambda$  ersetzen durch den symmetrisch zu (1) unterhalb der unteren Polreihe liegenden Weg (2), der in umgekehrter Richtung zu durchlaufen ist. Nehmen wir unter Hinzufügung des Faktors  $\frac{1}{2}$  für jede Integration in allen drei Variablenebenen den Weg (1) + (2), so entsteht

$$\Pi = -\frac{i}{16\pi^2} \underbrace{\iiint}_{(1)+(2)} \frac{\cos \lambda x \sin 2a\lambda - i \sin \lambda x \sin 2a\alpha}{\cos 2a\lambda - \cos 2a\alpha} \dots \dots \frac{d\lambda d\mu d\nu}{k_0^2 - \lambda^2 - \mu^2 - \nu^2};$$

der durch das Unendlichferne geschlossene Weg (1) + (2) läßt sich zu Umläufen um die Pole zusammenziehen, wobei diese in negativem Sinne umkreist werden.

Das Residuum an einem der Pole  $\lambda_0 = \frac{l\pi \pm a\alpha}{a}$  erhalten wir durch Entwicklung des Integrandennenners nach  $(\lambda - \lambda_0)$ :

$$\begin{aligned}
& \frac{\cos \lambda_0 x \sin 2 a \lambda_0 - i \sin \lambda_0 x \sin 2 a a}{-2 a \sin 2 a \lambda_0 (\lambda - \lambda_0) + \dots} \\
&= \frac{1}{\lambda - \lambda_0} \cdot \frac{-1}{2 a} \left( \cos \lambda_0 x - i \sin 2 a a \cdot \frac{\sin \lambda_0 x}{\sin 2 \lambda_0 a} \right) + \dots \\
&= \frac{1}{\lambda - \lambda_0} \cdot \frac{-1}{2 a} \left( \cos \lambda_0 x - i \sin \lambda_0 x \cdot \frac{\sin 2 a a}{\pm \sin 2 a a} \right) + \dots \\
&= \frac{1}{\lambda - \lambda_0} \cdot \frac{-1}{2 a} e^{\mp i \frac{l \pi \pm a a}{a} x} + \dots,
\end{aligned}$$

wobei die oberen Vorzeichen sich auf die Pole der oberen Reihe beziehen und umgekehrt. Die Summe aller Residuen, die von der Integration nach  $\lambda$  herrühren, ist

$$\frac{2 \pi i}{2 a} \left\{ \sum_{-\infty}^{+\infty} l \frac{e^{-i \frac{l \pi + a a}{a} x}}{k_0^2 - \mu^2 - \nu^2 - \left( \frac{l \pi + a a}{a} \right)^2} + \sum_{-\infty}^{+\infty} l \frac{e^{+i \frac{l \pi - a a}{a} x}}{k_0^2 - \mu^2 - \nu^2 - \left( \frac{l \pi - a a}{a} \right)^2} \right\}$$

oder da die zweite Summe identisch ist mit der ersten (man setze  $-l$  statt  $l$  für den Summationsbuchstaben):

$$\frac{2 \pi i}{a} \sum_{-\infty}^{+\infty} l \frac{e^{-i \frac{l \pi + a a}{a} x}}{k_0^2 - \mu^2 - \nu^2 - \left( \frac{l \pi + a a}{a} \right)^2}.$$

Bei analoger Ausführung der anderen Integrationen erhalten wir das Gesamtpotential:

$$(7) \quad \Pi = -\frac{\pi}{2 a b c} \sum_{l, m, n} \frac{e^{-i \frac{l \pi + a a}{a} x - i \frac{m \pi + b \beta}{b} y - i \frac{n \pi + c \gamma}{c} z}}{k_0^2 - \left( \frac{l \pi + a a}{a} \right)^2 - \left( \frac{m \pi + b \beta}{b} \right)^2 - \left( \frac{n \pi + c \gamma}{c} \right)^2}.$$

Diese Reihe, welche äquivalent ist den Integralen (5) und (6), stellt das genaue elektromagnetische Vektorpotential dar, welches durch Superposition der Kugelwellen entsteht.

Zieht man den Faktor

$$e^{-i(a x + \beta y + \gamma z)} = e^{-i k s}$$

vor das Summenzeichen, so hat das Potential die Form

$$(7a) \quad \Pi = -\frac{\pi}{2 a b c} \cdot e^{-i k s} \cdot \sum,$$

wo die übrigbleibende Summe  $\sum$  eine periodische Funktion (Fourierreihe) ist mit dem Entwicklungsbereich  $\pm a, \pm b, \pm c$ . Der Faktor  $e^{-i k s}$  unterscheidet sich von dem für die Dipol-



phase angesetzten Faktor nur darin, daß an Stelle der sprunghaften Veränderlichen  $S$  (der Koordinate eines Dipols) die stetige Koordinate  $s$  getreten ist.

Um eine lebhaftere Vorstellung des durch (7a) dargestellten Potentials zu bekommen, muß man sich vor Augen halten, daß der Entwicklungsbereich der periodischen Funktion ungemein klein ist gegenüber der Strecke, die der Faktor  $e^{-iks}$  zur vollen Periode braucht. Sind doch die Abstände der Atome in den Körpern von der Größenordnung  $10^{-8}$  cm, während Lichtwellen auch in starkbrechenden Körpern  $10^{-5}$  cm nicht unterschreiten. Es kommen also 100—1000 Atome auf eine Lichtwellenlänge.

Der Faktor  $e^{-iks}$  verändert sich innerhalb eines Elementarparallelepipeds also kaum. Um auf (7a) zu kommen, haben wir uns zunächst eine periodische Funktion von ziemlich kompliziertem Charakter vorzustellen, sie sich um jedes Atom herum wiederholt. Sodann haben wir, von Atom zu Atom wandernd, die Amplitude dieser Funktion gemäß dem Maßstab, der durch den langsam veränderlichen Faktor gegeben ist, zu regulieren.

Für die optische Welle kommt es auf die Schroffen und Zacken des mikroskopischen Feldes nicht an und die periodische Funktion wirkt in ihrer Wiederholung von Atom zu Atom nur durch ihren Mittelwert. Dieser ist — das konstante Glied 000 der Fourierschen Reihe —

$$\frac{1}{k_0^2 - k^2}$$

und daher ist das Potential des optischen Feldes:

$$(8) \quad a \bar{H} = a \cdot \frac{\pi}{2abc} e^{-iks} \frac{1}{k^2 - k_0^2};$$

es stellt mit dem Zeitfaktor  $e^{-int}$  versehen, eine ebene Welle der Richtung  $-s$  dar, deren Exponent nicht, wie der der einzelnen Kugelwellen als charakteristische Größe  $k_0$ , sondern  $k$  enthält. Dementsprechend erfüllt es die Ausbreitungsgleichung

$$\Delta \bar{H} + k^2 \bar{H} = 0.$$

Die ursprünglich für die Dipolphase angesetzte Größe  $k$  selbst, bzw. das Verhältnis

$$v = \frac{k}{k_0}$$

ist aus der „dynamischen Gleichgewichtsbedingung“ (10, § 2) zu bestimmen.

Der Faktor  $(k_0^2 - k^2)^{-1}$  bestimmt die Amplitude  $a$  der mitschwingenden Elektronen, wenn die Intensität der beobachteten optischen Welle gegeben ist; für kleine Werte von  $(k_0 - k)$ , d. h. wenn der Berechnungsindex nicht viel von 1 abweicht, sind die Amplituden besonders klein; dies ist aber im Grunde nur die Umkehrung der Aussage, daß wenig mitschwingende Elektronen den Brechungsindex wenig beeinflussen.

### § 7. Zweite Summation; erregendes Feld.

Die im vorigen Paragraphen abgeleitete Form des Gesamtpotentials gestattete in durchsichtiger Weise die Entstehung des optischen Feldes zu verfolgen. Besonders war leicht zu sehen, daß das Gesamtpotential an allen Gitterpunkten gleiche Phase  $e^{ikz}$  wie die Dipole hatte. Hierdurch kommt es, daß wir uns zur Berechnung der Dipolschwingungen (10, § 2) auf den Dipol im Nullpunkte beschränken dürfen. Für diesen haben wir das erregende Potential bzw. dessen zweite Ableitungen zu bilden, welche mittels der Determinante 11, § 2 die Phasenkonstante  $k$  bestimmen.

An der Summe (7) des vorigen Paragraphen läßt sich die Wirkung des Aufdipols 000 nicht abziehen; dies liegt daran, daß die Summe für  $x = y = z = 0$  unendlich wird, indem sie ungleichmäßig konvergiert und schließlich divergiert. Der abziehende Beitrag  $R^{-1} e^{ik_0 R}$  hingegen divergiert in ganz anderer Weise. Daher lassen sich beide Ausdrücke nicht verschmelzen, bevor sie unendlich werden. Übrigens gestattet die Form, in der II erscheint, auch nicht eine zweimalige Differentiation.

Es ist nun auch im Hinblick auf die numerische Rechnung besonders erfreulich, daß mit Hilfe des einfachen Integrals für das Einzelpotential (3, § 5) sich die Summation ebenfalls ausführen läßt. Man erhält ein einfaches Integral über ein Produkt von Thetafunktionen und Exponentialfunktionen und kann am Integranden die Substraktion des unendlich werdenden Gliedes wirklich vornehmen, so daß bei dieser Berechnung des erregenden Potentials kein Term  $\infty - \infty$  auftritt. Dies ist im Grunde das Verdienst der  $\vartheta$ -Transformationsformel, d. h. des Umstandes, daß jede  $\vartheta$ -Funktion zwei ganz verschiedene Entwicklungen zuläßt. In der einen Entwicklung stellt für uns jedes Glied die Wirkung eines Dipols dar und deshalb kann der Beitrag des Aufdipols gesondert erkannt und abgezogen

werden. Bei der anderen Entwicklung sind die Anteile der einzelnen Dipole ganz durcheinander geworfen und jedes Glied der Entwicklung entspricht einem der Terme, aus denen wir im vorigen Paragraphen das Gesamtpotential als dreifache Summe aufgebaut haben. Indem nun beide Darstellungen geeignet benutzt werden, gelingt es leicht, den Anteil des Aufdipols abzuziehen und doch die wesentlichen Teile des Feldes von den andern zu trennen.

Wir gehen aus von dem Integral 3, § 5:

$$(1) \quad \frac{e^{ik_0 R}}{R} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{(0)}^{\infty} e^{-R^2 \epsilon'^2 + \frac{k^2}{4 \epsilon'^2}} d\epsilon';$$

in dieses führen wir eine dimensionslose Variable  $\epsilon$  ein, indem wir setzen

$$(2) \quad \epsilon = \frac{2d}{\sqrt{\pi}} \epsilon', \quad \kappa_0^2 = \frac{d^2 k_0^2}{\pi}, \quad \kappa^2 = \frac{d^2 k^2}{\pi}, \quad P^2 = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{x^2 + y^2 + z^2}{d^2},$$

wo  $d$  eine Länge von der Größenordnung der  $a, b, c$  sei, welche wir später als das geometrische Mittel dieser Kantenlängen wählen werden. Dann ist

$$(3) \quad \frac{e^{ik_0 R}}{R} = \frac{1}{d} \int_{(0)}^{\infty} e^{-\frac{\pi \epsilon^2}{4} \{ (X-x)^2 + (Y-y)^2 + (Z-z)^2 \} + \frac{\kappa_0^2}{\epsilon^2}} d\epsilon.$$

Die Bestimmung des § 5 über die Richtung des Auslaufens aus dem Nullpunkte wird durch die Transformation nicht geändert.

Multiplizieren wir mit dem Dipolphasenfaktor und summieren, so erhalten wir das Gesamtpotential:

$$(4) \quad \Pi = \frac{1}{d} \sum_{l, m, n} \int_{(0)}^{\infty} e^{-\frac{\pi \epsilon^2}{4} \{ (2al-x)^2 + (2bm-y)^2 + (2cn-z)^2 \} - 2iaal - 2ib\beta m - 2ic\gamma n + \frac{\kappa_0^2}{\epsilon^2}} d\epsilon.$$

Der vom Summationsbuchstaben  $l$  abhängige Teil des Exponenten ist

$$-\epsilon^2 \frac{\pi a^2}{d^2} l^2 + \left( \epsilon^2 \frac{\pi a x}{d^2} - 2iaa \right) l.$$

Die einfachste Thetafunktion (welche auch  $\vartheta_{\infty}$  oder  $\vartheta_3$  genannt wird) läßt folgende Reihenentwicklung zu:

$$(5) \quad \vartheta(v | i\tau) = \sum_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi l^2 \tau - 2\pi i l v}.$$

Bei Vertauschung von Summations- und Integrationsfolge haben wir daher in (4)

$$\vartheta\left(\frac{a}{\pi} + i\frac{ax}{2d^2}\varepsilon^2 \middle| i\frac{a^2}{d^2}\varepsilon^2\right) \quad (10)$$

vor uns und das Gesamtpotential ist

$$(6) \quad \left\{ \begin{aligned} II &= \frac{1}{d} \int_{(0)}^{\infty} \vartheta\left(\frac{a}{\pi} + i\frac{ax\varepsilon^2}{2d^2} \middle| i\frac{a^2}{d^2}\varepsilon^2\right) \cdot \vartheta\left(\frac{b}{\pi} + i\frac{by\varepsilon^2}{2d^2} \middle| i\frac{b^2}{d^2}\varepsilon^2\right) \\ &\quad \cdot \vartheta\left(\frac{c}{\pi} + i\frac{cx\varepsilon^2}{2d^2} \middle| i\frac{c^2}{d^2}\varepsilon^2\right) \cdot e^{-P^2\varepsilon^2 + \frac{\kappa_0^2}{\varepsilon^2}} d\varepsilon. \end{aligned} \right. \quad (11)$$

Lassen wir bei der Summation den Dipol 000 aus, so fällt das Glied 000 fort und wir erhalten das erregende Potential:

$$(7) \quad II = \frac{1}{d} \int_{(0)}^{\infty} \{ \vartheta \cdot \vartheta \cdot \vartheta - 1 \} e^{-P^2\varepsilon^2 + \frac{\kappa_0^2}{\varepsilon^2}} d\varepsilon.$$

Um die Integrale ausführen zu können benutzen wir die Reihenentwicklungen der  $\vartheta$ . Die ursprüngliche Reihe (5) konvergiert schnell, wenn  $\varepsilon$  groß ist; eine für kleine  $\varepsilon$  brauchbare Entwicklung erhalten wir durch die  $\vartheta$ -Transformationsformel<sup>1)</sup>

$$(8) \quad \left\{ \begin{aligned} \vartheta(v | i\tau) &\equiv \frac{1}{\sqrt{\tau}} e^{-\pi \frac{v^2}{\tau}} \vartheta\left(i\frac{v}{\tau} \middle| \frac{i}{\tau}\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{\tau}} e^{-\pi \frac{v^2}{\tau}} \sum e^{-\pi \frac{l^2}{\tau} - 2\pi i l \frac{v}{\tau}}. \end{aligned} \right.$$

Mittels der „transformierten“ und der „ursprünglichen“ Reihe ergeben sich folgende Integrale für  $II$ :

$$(9) \quad II = \left\{ \begin{aligned} &\frac{1}{d} \cdot \frac{d^3}{abc} \int \sum e^{-\frac{\pi}{\varepsilon^2} \left\{ \left( l \frac{d}{a} + \frac{d\alpha}{\pi} \right)^2 + \dots \right\} - i\pi \left\{ \left( l \frac{d}{a} + \frac{d\alpha}{\pi} \right) \frac{x}{d} + \dots \right\} + \frac{\kappa_0^2}{\varepsilon^2}} \varepsilon^{-3} d\varepsilon \\ &\frac{1}{d} \int \sum e^{-\pi \varepsilon^2 \left\{ \left( l \frac{a}{d} + \frac{x}{2d} \right)^2 + \dots \right\} - 2i(la\alpha + \dots) + \frac{\kappa_0^2}{\varepsilon^2}} d\varepsilon. \end{aligned} \right. \quad (13)$$

Die Integranden sind für jedes  $\varepsilon$  identisch gleich. Wir wollen abkürzend die Exponenten im ersten und zweiten Integral

1) Vgl. z. B. A. Krazer, Lehrbuch der Thetafunktionen, p. 96. Teubner.

durch I und II bezeichnen. Dann sind die Ableitungen

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial x^2} = \Pi_{xx} \quad \text{und} \quad \frac{\partial^2 \Pi}{\partial x \partial y} = \Pi_{xy}:$$

$$(10) \quad \Pi_{xx} = \begin{cases} -\frac{\pi^2}{abc} \int \sum \left( l \frac{d}{a} + \frac{d\alpha}{\pi} \right)^2 \cdot e^l \varepsilon^{-3} d\varepsilon \\ \frac{1}{d^2} \int \sum \left\{ \pi^2 \varepsilon^4 \left( l \frac{a}{d} + \frac{x}{2d} \right)^2 - \frac{\pi \varepsilon^2}{2} \right\} e^{ll} d\varepsilon. \end{cases}$$

$$(11) \quad \Pi_{xy} = \begin{cases} -\frac{\pi^2}{abc} \int \sum \left( l \frac{d}{a} + \frac{d\alpha}{\pi} \right) \left( m \frac{d}{b} + \frac{d\beta}{\pi} \right) e^l \varepsilon^{-3} d\varepsilon \\ \frac{1}{d^2} \int \sum \pi^2 \varepsilon^4 \left( l \frac{a}{d} + \frac{x}{2d} \right) \left( m \frac{b}{d} + \frac{y}{2d} \right) e^{ll} d\varepsilon. \end{cases}$$

Wir müssen nun von  $\Pi_{xx}$  das zweimal nach  $x$  differenzierte Einzelpotential des Aufdipols abziehen. Zu dem Zweck teilen wir die Integration, welche  $\Pi_{xx}$  liefert, in zwei Teile: von 0 bis  $E$  und von  $E$  bis  $\infty$ .  $E$  ist zunächst unbestimmt. Auf der ersten Weggälfte benutzen wir die Reihen mit dem Exponenten I, auf der zweiten die Reihen mit II. Abzuziehen ist (vgl. (3) dieses Paragraphen)

$$(12) \quad \frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{e^{ik_0 R}}{R} = \frac{1}{d^3} \int_{(0)}^{\infty} \left( \pi^2 \varepsilon^4 \frac{x^2}{4d^2} - \pi \frac{\varepsilon^2}{2} \right) e^{-P^2 \varepsilon^2 + \frac{x_0^2}{\varepsilon^2}} d\varepsilon.$$

Teilen wir auch dies Integral durch die Übergangsstelle  $E$  in zwei Teile, so ist das Integral von  $E$  bis  $\infty$  identisch mit dem Gliede 000 der zweiten Hälfte von  $\Pi_{xx}$ . Die Subtraktion läßt sich also durch einen Akzent an der Summe ausführen und es ist, wenn wir gleichzeitig zu  $x = y = z = P = 0$  übergehen

$$(13) \quad \begin{cases} \Pi'_{xx} = \Pi_{xx}^{(1)} + \Pi_{xx}^{(2)}; \\ \Pi_{xx}^{(1)} = -\frac{\pi^2}{abc} \sum_{(0)}^E \int \left( l \frac{d}{a} + \frac{d\alpha}{\pi} \right)^2 \cdot e^l \cdot \varepsilon^{-3} d\varepsilon + \frac{1}{d^3} \int \frac{\pi \varepsilon^2}{2} e^{\frac{x_0^2}{\varepsilon^2}} d\varepsilon \\ \Pi_{xx}^{(2)} = \frac{1}{d^3} \sum_E' \int \left\{ \left( l \pi \varepsilon^2 \frac{a}{d} \right)^2 - \frac{\pi \varepsilon^2}{2} \right\} e^{ll} d\varepsilon, \end{cases}$$

wo die Exponenten für den Nullpunkt sind:

$$I = -\frac{\pi}{\varepsilon^2} \left\{ \left( l \frac{d}{a} + \frac{d\alpha}{\pi} \right)^2 + \dots \right\} + \frac{x_0^2}{\varepsilon^2},$$

$$II = -\pi \varepsilon^2 \left\{ l^2 \frac{a^2}{d^2} + \dots \right\} - 2i(la\alpha + \dots) + \frac{x_0^2}{\varepsilon^2}.$$

In  $\Pi_{xx}^{(1)}$  läßt sich das allgemeine Summenglied leicht integrieren, wenn man beachtet, daß  $\varepsilon^{-3} d\varepsilon = -\frac{1}{2} d\left(\frac{1}{\varepsilon^2}\right)$  ist. Das unbestimmt integrierte Glied liefert bei  $\varepsilon = 0$  wegen der Richtung des Auslaufens aus dem Nullpunkt keinen Beitrag; es bleibt der Wert an der oberen Grenze  $E$  und man hat

$$(14) \quad \left\{ \begin{aligned} \Pi_{xx}^{(1)} &= \frac{\pi^2}{2abc} \sum \frac{\left(l\frac{d}{a} + \frac{d\alpha}{\pi}\right)^2 e^{-\frac{\pi}{E^2} \left\{ \left(l\frac{d}{a} + \frac{d\alpha}{\pi}\right)^2 + \dots \right\} + \frac{x_0^2}{E^2}}}{x_0^2 - \pi \left(l\frac{d}{a} + \frac{d\alpha}{\pi}\right)^2 - \dots} \\ &\quad + \frac{\pi}{2d^3} \int_{(0)}^E e^{\frac{x_0^2}{\varepsilon^2}} \varepsilon^2 d\varepsilon. \end{aligned} \right.$$

Man sieht hier deutlich den Zusammenhang mit dem Gesamtpotential in der Form des § 6. Für  $E = \infty$  geht  $\Pi'_{xx}$  über in das (formal) differenzierte Gesamtpotential (7), § 6, genommen am Nullpunkte und vermindert um das (ebenfalls unendliche) vom Aufdipol herrührende Glied. Wird aber  $E$  im Endlichen beibehalten, so sind alle Terme endlich, weil sich der unendlich große Teil der Wirkung des Aufdipols in  $\Pi_{xx}^{(2)}$  herausgehoben hat.

Durch analoge Rechnung ergibt sich:

$$(15) \quad \left\{ \begin{aligned} \Pi'_{xy} &= \Pi_{xy}^{(1)} + \Pi_{xy}^{(2)} \\ \Pi_{xy}^{(1)} &= \frac{\pi^2}{2abc} \sum \frac{\left(l\frac{d}{a} + \frac{d\alpha}{\pi}\right) \left(m\frac{d}{b} + \frac{d\beta}{\pi}\right) \cdot e^{-\frac{\pi}{E^2} \left\{ \left(l\frac{d}{a} + \frac{d\alpha}{\pi}\right)^2 + \dots \right\} + \frac{x_0^2}{E^2}}}{x_0^2 - \pi \left(l\frac{d}{a} + \frac{d\alpha}{\pi}\right)^2 + \dots} \\ \Pi_{xy}^{(2)} &= \frac{\pi^2}{d^3} \frac{ab}{d^2} \int_E^\infty \sum' l \cdot m \cdot \varepsilon^4 \cdot \varepsilon^{11} d\varepsilon. \end{aligned} \right.$$

In  $\Pi_{xy}^{(1)}$  fehlt das Integral, welches bei  $\Pi_{xx}^{(1)}$  dem von der Summe abzuziehenden Einzelpotential entspricht; dies liegt daran, daß bei der Differentiation von (3) nach  $x$  und  $y$  kein unabhängig von der Richtung unendlich werdendes Glied auftritt. Der Akzent an der Summe in  $\Pi_{xy}^{(2)}$  darf trotz des Faktors  $l \cdot m$  nicht fortgelassen werden, da das Integral über das Glied  $l = m = n = 0$  unendlich ist.

Die Reihen (14) für  $\Pi_{xx}^{(1)}$  und (13) für  $\Pi_{xx}^{(2)}$  geben die zur Berechnung der Hauptbrechungsindizes nötigen Daten, soweit sie

sich ohne Vernachlässigungen finden lassen. Im folgenden Paragraphen werden nun die Vereinfachungen benutzt, welche die wirklichen Größenverhältnisse bei der Ausbreitung des Lichtes in festen Körpern mit sich bringen.

#### § 8. Vernachlässigungen wegen der Kleinheit von $\kappa$ , $\kappa_0$ .

Die in § 7, (11) und (12) aufgestellten Formeln für die Ableitungen des erregenden Potentials am Orte des Dipols 000 können erheblich vereinfacht werden, wenn  $\kappa_0$ ,  $\kappa$  und  $d.a$ ,  $d.\beta$ ,  $d.\gamma$  kleine Zahlen sind. Dies ist stets der Fall, sobald es sich um sichtbares Licht und feste Körper handelt, da  $d$  von der Größe der Atomabstände,  $k_0$ ,  $k$ ,  $a$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  von der Ordnung  $1/\lambda$  sind. Wie schon oben festgestellt wurde, ist das Verhältnis  $d/\lambda$  von der Ordnung  $1/100$  bis  $1/1000$ , und von der gleichen Ordnung sind die obigen Größen.

Unter diesen Umständen spielen Terme wie  $d.a/\pi$  in den Reihen (13), (14), § 7, nur dann eine Rolle, wenn  $l = m = n = 0$  ist.

Wir streichen deshalb in allen Gliedern der Reihe die kleinen Größen, nachdem wir das Glied 000 abgesondert haben. Dieses Glied lautet für  $\Pi_{xx}^{(1)}$  nach (14), § 7:

$$\frac{\pi^2}{2abc} \frac{d^2 a^2}{\pi^2} \frac{1}{\kappa_0^2 - \kappa^2} = \frac{\pi}{2abc} \frac{\nu^2 \cos^2(S, x)}{1 - \nu^2},$$

wobei  $\nu = \kappa/\kappa_0$  der Brechungsindex ist. Das Glied ist also von der Größenordnung 1 in bezug auf  $\kappa^2$ .

Das in (14) des vorigen § auftretende Integral

$$\int_{(0)}^E e^{\frac{\kappa_0^2}{\varepsilon^2}} \varepsilon^2 d\varepsilon$$

hat wegen der Kleinheit von  $\kappa_0$  einen Integranden, der erst dort von  $\varepsilon^2$  erheblich abweicht, wo der Integrand ohnehin sehr klein ist. Wir begehen einen Fehler höchstens von der Ordnung  $\kappa_0^2$ , wenn wir dies Integral ersetzen durch das von  $\kappa_0$  unabhängige

$$\int_{(0)}^E \varepsilon^2 d\varepsilon = \frac{E^3}{3}.$$

Im ganzen wird hiernach der erste Teil des erregenden Potentials

$$\Pi_{xx}^{(1)} = \frac{\pi}{2abc} \left( \frac{\nu^2}{1 - \nu^2} \cos^2(S, x) + \psi_{xx}^{(1)} \right),$$

wo  $\psi_{xx}^{(1)}$  in dieser Annäherung weder von  $x$  und  $x_0$  noch von der Ausbreitungsrichtung der Welle, sondern allein von den  $a, b, c$  abhängt.

Die analoge Betrachtung wird an der Reihe (13), § 7, für  $\Pi_{xx}^{(2)}$  durchgeführt. Auch hier können die kleinen Größen von der Ordnung  $x_0^2$  im Exponenten der  $e$ -Funktion vernachlässigt werden, sobald sie neben Gliedern der Größenordnung 1 stehen. Nur für das Summenglied 000 wäre dies nicht der Fall; da dieses Glied aber durch den Akzent sowieso ausgeschlossen ist, so wird  $\Pi_{xx}^{(2)}$  ganz und gar unabhängig von den kleinen Größen. Wir schreiben in dieser Näherung

$$\Pi_{xx}^{(2)} = \frac{\pi}{2abc} \psi_{xx}^{(2)}$$

und haben im ganzen für das erregende Potential, wenn noch  $\psi_1 + \psi_2 = \psi$  gesetzt wird:

$$(1) \quad \Pi'_{xx} = \frac{\pi}{2abc} \left( \frac{v^2}{1-v^2} \cos^2(S, x) + \psi_{xx} \right)$$

und analog

$$(2) \quad \Pi'_{xy} = \frac{\pi}{2abc} \left( \frac{v^2}{1-v^2} \cos(S, x) \cos(S, y) \right).$$

Bei  $\Pi'_{xy}$  und den analogen Differentiationen tritt offenbar kein Glied  $\psi_{xy}$  auf; denn dieses wäre ja unabhängig von der Richtung und also bei Ausbreitung längs einer der Koordinatenachsen auch vorhanden. Wir wissen aber, daß aus Symmetrie in diesem Fall  $\Pi'_{xy} = 0$  ist (vgl. oben).

Schließlich ist in dieser Bezeichnungsweise auch

$$(3) \quad \Delta \Pi' = \frac{\pi}{2abc} \left( \frac{v^2}{1-v^2} + \Delta \psi \right).$$

#### § 9. Die Dispersionsformel.

In § 2 hatten wir sechs Fälle zur Berechnung der Hauptbrechungsindizes unterscheiden müssen, je nach der Richtung von Schwingung und Strahl, hatten aber bereits dort vermutet, daß je zwei dieser Indizes so nahe zusammenfielen, daß ihre Unterscheidung praktisch unnötig wäre. In der Tat können wir jetzt die Bestimmungsgleichung bei Ausbreitung der optischen Welle in der  $z$ -Richtung und Schwingung in der  $x$ -Richtung aufschreiben:

$$\Omega + (\Delta \Pi' - \Pi'_{xx})_{\alpha=\beta=0}^{\gamma=k} = \Omega + \frac{\pi}{2abc} \left( \frac{v_{xz}^2}{1-v_{xz}^2} + \Delta \psi - \psi_{xx} \right) = 0$$



und finden dann, daß in unserer Annäherung wegen der Unabhängigkeit der  $\psi$  von der Richtung des Strahles die identische Gleichung auch für  $v_{xy}$ , d. h. bei  $\alpha = \gamma = 0$ ,  $\beta = k$ , gelten würde. Wir lassen deshalb den Unterschied zwischen  $v_{xy}$  und  $v_{xz}$  fort, indem wir  $v_x$  für den Hauptbrechungsindex bei Dipol-schwingungen parallel der  $x$ -Achse schreiben.

Nennen wir  $v$  das einen Dipol enthaltende Volumen  $8abc$ , so haben wir für den Brechungsindex die Gleichung

$$(1) \quad \frac{v_x^2}{v_x^2 - 1} = \frac{v}{4\pi} \Omega + \Delta\psi - \psi_{xx}$$

oder

$$(2) \quad v_x^2 = 1 + \frac{1}{\frac{v}{4\pi} \Omega + \Delta\psi - \psi_{xx} - 1}.$$

Erinnern wir uns der Bedeutung der Elektronenkonstanten  $\Omega$  (9, § 2)

$$\Omega = \frac{m}{e^2} \left( n_0^2 - n^2 - i n \frac{g}{m} \right);$$

dabei soll, um durchsichtige Kristalle zu betrachten, der Reibungskoeffizient  $g = 0$  gesetzt werden. Dann ist die Dispersionsformel:

$$(3) \quad v_x^2 = 1 + \frac{1}{\frac{v}{4\pi e^2} n_0^2 - (1 - \Delta\psi + \psi_{xx}) - \frac{v}{4\pi e^2} n^2}$$

$$(4) \quad = 1 + \frac{1}{B_x - A n^2};$$

oder unter Einführung der Wellenlänge  $\lambda = \frac{2\pi c}{n}$ :

$$(5) \quad v_x^2 = 2 + \frac{\lambda^2}{\lambda^2 B_x - 4\pi^2 c^2 A}.$$

Wir haben hier eine Dispersionsformel mit zwei Konstanten vor uns, von gleicher Bauart, wie die H. A. Lorentzsche<sup>1)</sup> und die Plancksche<sup>1)</sup> Formel. Letztere lautet in unseren Bezeichnungen

$$v^2 = 1 + \frac{1}{\frac{v}{4\pi e^2} n_0^2 - \frac{1}{3} - \frac{v}{4\pi e^2} n^2},$$

1) Zitate unter § 4.

während Lorentz  $-(\frac{1}{3} + s)$  statt  $-\frac{1}{3}$  hat, wobei  $s$  unbestimmt bleibt. In allen drei Formeln bedeutet dieser Term den Einfluß der Dipole im Körper auf einen Aufdipol. Der Teil  $\frac{1}{3}$  stammt von der zu einem homogenen Medium aus gebreiteten weiteren Umgebung des Aufdipols, während in Lorentz's die unbestimmte Einwirkung der Nachbarmoleküle berücksichtigt ist. Für den Fall kubischer Anordnung der Nachbarmoleküle zeigt H. A. Lorentz, daß  $s = 0$  wird, so daß seine Formel mit der Planckschen identisch wird.

Auch bei uns erhält man für ein kubisches Gitter den Term  $\frac{1}{3}$ . Man hat dann nämlich aus Symmetrie

$$(6) \quad 1 - \Delta\psi + \psi_{xx} = 1 - \frac{2}{3}\Delta\psi.$$

Nun läßt sich aber  $\Delta\psi$  auf folgende Art bestimmen: Man entwickle das Gesamtpotential (7), § 6 nach Potenzen von  $k$ . Man erhält

$$\Pi = -\frac{4\pi}{v} \left( \frac{1}{k_0^2 - k^2} + [k^{-1} \dots + \dots] \right)$$

wenn nur die niedrigste Potenz ausgeschrieben wird.

Um das erregende Potential zu erhalten, muß hiervon

$$\frac{e^{ikR}}{R} = \frac{1}{R} + ik - \dots$$

abgezogen werden. Das Glied mit  $k^{-2}$  in der Entwicklung von  $\Pi$  geht unverändert in die Entwicklung von  $\Pi'$  über. Daher hat man

$$\begin{aligned} \Delta\Pi &= -k_0^2\Pi = \frac{4\pi}{v} \left( \frac{k_0^2}{k_0^2 - k^2} + [k \dots + \dots] \right) \\ &= \frac{4\pi}{v} \left( \frac{1}{1 - v^2} + [k \dots - \dots] \right) \\ &= \frac{4\pi}{v} \left( \frac{v^2}{1 - v^2} + 1 + [k \dots] \right). \end{aligned}$$

Durch Vergleich mit (3), § 8 ergibt sich also

$$\Delta\psi = 1,$$

und daher nach (6)

$$1 - \Delta\psi + \psi_{xx} = \frac{1}{3}.$$

Insoweit der isotrope Körper durch eine kubische Anordnung ersetzt werden darf, stimmt also unsere Formel gänzlich mit der Lorentz-Planckschen überein.

Die Diskussion der erhaltenen Dispersionsformel würde, was Abhängigkeit des Brechungs- und Absorptionsindex von der Wellenlänge betrifft, nichts anderes ergeben, als was bereits von Planck ausgeführt wurde.

Nur was die Besonderheiten, die durch die Anisotropie der Formel (3) entstehen, betrifft, soll hier folgendes bemerkt werden:

1. Aus zwei Messungen von  $\nu_x$  können  $A$  und  $B_x$  (Formel 4) berechnet werden. Da die  $\psi$  durch die Kantenlängen des Gitters gegeben sind, so erhält man unter Benutzung der Werte eines einzigen Hauptbrechungsindex bei zwei verschiedenen Wellenlängen die vollständige Dispersionsformel nicht nur für diesen Index, sondern auch für die beiden anderen Hauptbrechungsindizes.

2. Die Konstante  $A$  hat unabhängig davon, an welchem Brechungsindex sie bestimmt wird, den für das Gitter charakteristischen Wert  $v/4\pi \cdot m/e^2$ . Sie sollte also gleich groß sein, einerlei welchen Hauptbrechungsindex man zu ihrer Bestimmung benutzt. Man findet aber diese Beziehung nicht erfüllt. Z. B. ist für Anhydrit

$$A_\alpha = 1,6125 \cdot 10^{-33}; \quad A_\beta = 1,6726 \cdot 10^{-33}; \quad A_\gamma = 1,5501 \cdot 10^{-33},$$

also Abweichungen von 8 Proz.

Dies liegt einmal daran, daß das von den Elektronen mit der Eigenfrequenz  $n_0$  gebildete Gitter kein so einfaches Bravaisches ist, wie hier vorausgesetzt wurde; ferner aber gibt es neben den Elektronen mit der Eigenfrequenz  $n_0$  andere mit anderen Eigenfrequenzen und eventuell Ionen mit Eigenfrequenzen im Ultrarot.

Die zweikonstantige Formel (3) ist dann als Annäherung an eine Formel komplizierterer Bauart aufzufassen und die Konstante  $A$  der Dispersion verliert hierbei ihre einfache Bedeutung und kann von der Ausbreitungsrichtung der Welle oder dem Polarisationszustand abhängen. Hierher gehört die

Bemerkung von Drude<sup>1)</sup>, daß im Kalkspath bei Einfall senkrecht zur optischen Achse auf den ordentlichen Strahl *scheinbar* fünf, auf den außerordentlichen zwei Elektronen pro Molekül mitschwingen.

3. Aus der Formel (3) geht ohne weiteres hervor, daß die Wirkung der Gitterstruktur auch aufgefaßt werden kann *wie eine anisotrope Lagerung der Elektronen in den Molekülen*. Die Änderung der Dispersionsformel, welche beim Übergang von  $v_x$  zu  $v_y$  bzw. von  $\psi_{xx}$  zu  $\psi_{yy}$  stattfindet, kann ja, wie (3) zeigt, für alle Wellenlängen ersetzt werden durch eine geeignete Abänderung der Eigenschwingung  $n_0$ . Innerhalb des Gitterverbandes besitzt ein Dipol, der an sich isotrop gebunden wäre, durch den Einfluß der Struktur von selbst drei verschiedene Eigenschwingungsdauern und Frequenzen. Die beiden Ansichten, von denen die eine die Doppelbrechung auf Anisotropie der kleinsten Teilchen, die andere auf die anisotrope Lage der isotrop gedachten kleinsten Teilchen zurückführen will, stimmen in ihren qualitativen Folgerungen überein.

#### § 10. Die Gleichung der Normalenfläche.

Wir haben uns bisher ausschließlich mit den Hauptbrechungsindizes beschäftigt, deren wir ursprünglich sechs unterscheiden mußten. Mit Vernachlässigung der Glieder von der Ordnung  $(a/\lambda)^2$  erkannten wir je zwei, die sich auf den gleichen Polarisationszustand beziehen, als einander gleich, so daß die Eigenschaften des Gitters in dieser Hinsicht mit denen eines zweiachsigen Kristalles übereinstimmen.

Es fragt sich, ob dies für alle Richtungen gilt, d. h. ob die *Beziehung zwischen Richtung der Wellennormalen  $S$  und dem Brechungsindex, welche in der Determinante (11, § 2) enthalten ist, von der gleichen Art ist, wie bei rhombischen Kristallen.*

Indem wir mit demselben Grad der Genauigkeit rechnen tragen wir die Werte (1), (2), (3) aus § 8 in die erste Zeile der Determinante ein. Diese wird:

1) Ann. d. Phys. 14. p. 691. 1904.

$$\Omega + \frac{\pi}{2abc} \left( \frac{\nu^2}{1-\nu^2} (1 - \cos^2(s, x)) + \Delta\psi - \psi_{xx} \right);$$

$$- \frac{\pi}{2abc} \frac{\nu^2}{1-\nu^2} \cos(s, x) \cos(s, y); - \frac{\pi}{2abc} \frac{\nu^2}{1-\nu^2} \cos(s, x) \cos(s, z).$$

Führen wir die Abkürzungen

$$N = \frac{\nu^2}{1-\nu^2}, \quad \cos(s, x) = \cos 1 \dots$$

ein und ersetzen

$$\frac{2abc}{\pi} \Omega + \Delta\psi - \psi_{xx} = \frac{\nu_x^2}{1-\nu_x^2} = N_x$$

durch seinen Wert  $N_x$ , so lautet die Determinante:

$$\begin{vmatrix} N \sin^2 1 - N_x & -N \cos 1 \cos 2 & -N \cos 1 \cos 3 \\ -N \cos 1 \cos 2 & N \sin^2 2 - N_y & -N \cos 2 \cos 3 \\ -N \cos 1 \cos 3 & -N \cos 2 \cos 3 & N \sin^2 3 - N_z \end{vmatrix} = 0.$$

Schreiben wir in der Diagonalreihe ( $1 - \cos^2 \dots$ ) statt  $\sin^2 \dots$  und nehmen den (außer in trivialen Fällen) von Null verschiedenen Faktor

$$-N^3 \cos^2 1 \cdot \cos^2 2 \cdot \cos^2 3$$

heraus, so bleibt

$$\begin{vmatrix} \left(1 - \frac{N-N_x}{N \cos^2 1}\right) & 1 & 1 \\ 1 & \left(1 - \frac{N-N_y}{N \cos^2 2}\right) & 1 \\ 1 & 1 & \left(1 - \frac{N-N_z}{N \cos^2 3}\right) \end{vmatrix} = 0$$

oder, bis auf einen Faktor:

$$\frac{N \cos^2 1}{N-N_x} + \frac{N \cos^2 2}{N-N_y} + \frac{N \cos^2 3}{N-N_z} - 1 = 0.$$

Dies ist aber nichts anderes als die Gleichung der Normalenfläche eines zweiachsigen Kristalls. Ersetzt man nämlich

die 1 durch  $\cos^2 1 + \cos^2 2 + \cos^2 3$  und die  $N \dots$  durch ihre Ausdrücke in  $v$ , so erhält die Gleichung die übliche Form:

$$\frac{v_x^3 \cos^3 1}{v^3 - v_x^2} + \frac{v_y^3 \cos^3 2}{v^3 - v_y^2} + \frac{v_z^3 \cos^3 3}{v^3 - v_z^2} = 0.$$

Wir sehen hierdurch, daß ein Punktgitter der betrachteten Art sich nach allen Richtungen wie ein Kristall verhält und daß vom Standpunkt der Optik nichts gegen eine noch so einfache Gittervorstellung der Kristalle einzuwenden ist.

### § 11. Die Doppelbrechung D.

Bereits in den allgemeinen Betrachtungen des § 2 war auf eine Beziehung zwischen den Hauptbrechungsindizes hingewiesen worden, welche nach (14), § 2 hieß

$$(1) \quad (\Delta \Pi' - \Pi'_{xx})_z = (\Delta \Pi' - \Pi'_{yy})_z.$$

Die Indizes  $z$  an den Klammern sollten daran erinnern, daß die Potentiale sich beiderseits auf den Fall der Ausbreitung des Feldes längs  $z$  (allein  $\gamma \neq 0$ ) beziehen, daß aber links der Brechungsindex  $v_x$  für Schwingungen  $a = a_x$ , rechts  $v_y$  für  $a = a_y$  gemeint ist.

Setzen wir in diese Beziehung die angenäherten Werte (1), (2), (3), § 8 ein, so entsteht

$$\frac{\pi}{2abc} \left( \frac{v_x^2}{1-v_x^2} + \Delta\psi - \psi_{xx} \right) = \frac{\pi}{2abc} \left( \frac{v_y^2}{1-v_y^2} + \Delta\psi - \psi_{yy} \right)$$

oder da  $\Delta\psi$  in beiden Fällen das gleiche ist:

$$(2) \quad \frac{v_x^2 - v_y^2}{(1-v_x^2)(1-v_y^2)} = \psi_{xx} - \psi_{yy} = D_{xy}.$$

Die links stehende Zahl, welche bereits von T. H. Havelock als unabhängig von der Wellenlänge erkannt wurde, finden wir überhaupt nur abhängig von den Verhältnissen  $a:b:c$  des Gitters und nennen sie das Maß der strukturellen Doppelbrechung.

Durch die Reihen des § 7 sind wir in der Lage, diese Konstante für beliebige Verhältnisse  $a:b:c$  auszurechnen. Die

Reihen konvergieren bei passend gewählter Teilungsstelle  $E$  genügend schnell, um eine bequeme Zahlenrechnung zu ermöglichen.

Es kann aber heute noch keinen Erfolg versprechen, die Rechnung an einen bestimmten Kristall anzuknüpfen in der Hoffnung, eine Übereinstimmung zwischen berechnetem und beobachtetem Wert zu finden. Denn keiner der bisher (Herbst 1915) ihrer Struktur nach bekannten Kristalle hat eine so einfache Konstitution, daß mit einiger Sicherheit geschlossen werden kann, daß eine Elektronensorte zu seiner Beschreibung in optischer Hinsicht ausreicht.

Die numerische Rechnung und die Ausdehnung der Theorie auf kompliziertere Raumgitter soll daher hier unterbleiben.

Nur zur Orientierung über die zu erwartende Größenordnung des Effektes sei angegeben, daß unter Zugrundelegung des Verhältnisses  $a : b : c = 0,8932 : 1 : 1,0008$  (Anhydrit) sich ergibt:

$$D_{xy} = 0,17848 \quad D_{xz} = 0,17983 \quad D_{yz} = 0,00133,$$

während beobachtete Werte sind (ebenfalls Anhydrit)

$$D_{\beta\alpha} = 0,05145 \quad D_{\gamma\alpha} = 0,05925 \quad D_{\gamma\beta} = 0,00854$$

Hieraus kann geschlossen werden, daß die anisotrope Anordnung allein genügt, um Doppelbrechung der beobachteten Größe zu erklären.

Daß die einfachen Annahmen über das Raumgitter nicht hinreichen, um im speziellen Fall den Erscheinungen gerecht zu werden, zeigt sich auch daran, daß in der Beobachtung  $D$  nur bis zu einem gewissen Grade unabhängig von der Wellenlänge gefunden wird. So ist bei Quarz die Änderung von  $D$  zwischen den Linien  $C$  und  $E$  des Spektrums 15mal geringer, als die Änderung der Doppelbrechung ( $\omega - \epsilon$ ) in gewöhnlichem Sinne. Bei den meisten Kristallen ist die Änderung von  $D$  etwa 3 bis 6mal kleiner als die der gewöhnlichen Doppelbrechung — es gibt aber einige, bei denen sich  $D$  stärker als die Doppelbrechung ändert.

Ob die Konstanz von  $D$  in beliebig zusammengesetzten Punktsystemen aus gleichen Elektronen gilt, möge dahin-

gestellt bleiben; sicherlich gilt sie nicht in einem aus verschiedenartigen Ionengittern zusammengesetzten Punktsystem, da es nicht möglich ist, aus den zwei Dispersionsgleichungen für  $\nu_x$  und  $\nu_y$  die zwei oder mehr Elektronenkonstanten  $\Omega_i$  zu eliminieren.

Bei zwei Elektronengattungen läßt sich leider keine entsprechende einfache Beziehung zwischen den drei Hauptbrechungsindizes angeben, welche unabhängig von der Wellenlänge gilt.

(II. Teil im folgenden Heft.)

---



2. *Untersuchungen über die innere Reibung  
von Flüssigkeiten. III. Mitteilung.  
Innere Reibung und Gleitung tropfbarer  
Flüssigkeiten*<sup>1)</sup>;  
von Győző Zemplén und Béla Pogány.

Inhalt: § 13. Einleitung. — § 14. Beschreibung der Versuche und deren Ergebnisse. — § 15. Vergleichung der Versuchsergebnisse mit der Theorie. — § 16. Die Gleitung des Wassers an Kupfer. — § 17. Zusammenfassung.

§ 13. **Einleitung.**

Einer von uns erstattete schon in mehreren vorhergehenden Mitteilungen Bericht über eine Methode, die er zur Untersuchung der inneren Reibung von Flüssigkeiten ausarbeitete.<sup>2)</sup>

In seiner zweiten Mitteilung bestimmte er auf theoretischem Wege das Drehmoment, welches eine um eine vertikale Achse mit beliebig großer, aber gleichmäßiger Geschwindigkeit rotierende Hohlkugel auf eine andere, kleinere, mit der Hohlkugel konzentrisch auf einen Draht aufgehängte Kugel infolge der inneren Reibung der zwischen ihnen sich befindenden Flüssigkeit ausübt.

Das Ergebnis hat er mit an Luft und CO<sub>2</sub> ausgeführten Messungen kontrolliert und mit hinreichender Genauigkeit bestätigt gefunden.

Die aus den Grundgleichungen der Hydrodynamik abgeleitete Gesetzmäßigkeit, welche dieses Drehmoment als Funktion der Umdrehungsgeschwindigkeit der äußeren Kugel darstellt, soll bei jeder Art der zwischen den Kugeln sich

1) Vorgelegt der Ung. Akademie d. Wiss. in d. Sitz. vom 16. März 1914.

2) Gy. Zemplén, Ann. d. Phys. **29**, p. 869. 1909 und **38**, p. 71. 1912. Die Numerierung der Paragraphen, sowie die Bezeichnungen schließen sich an diejenigen der zweiten Mitteilung.

befindlichen Flüssigkeit ihre Gültigkeit beibehalten, wenn die Flüssigkeit nur inkompressibel ist. Insbesondere war es also nicht uninteressant, zuzusehen, ob sie sich auch bei den bisher nicht untersuchten tropfbar flüssigen Körpern bewährt?

Wir stellten uns die Aufgabe, dies experimentell zu untersuchen und wählten als Versuchsmaterial Wasser. Der Koeffizient der inneren Reibung des Wassers ist mehr als 50mal so groß wie derjenige von Luft, und seine Dichte ist ungefähr 800mal größer als die Luftdichte. Wir können das Resultat gleich vorwegnehmen, daß trotz des verschiedenen Aggregatzustandes und der großen Unterschiede in den numerischen Werten von Reibungskoeffizient und Dichte sowohl Luft und  $\text{CO}_2$  wie Wasser sich in den von uns untersuchten weiten Geschwindigkeitsintervallen der theoretisch hergeleiteten Gesetzmäßigkeit in gleicher Weise fügen; die Versuche mit Wasser wurden in ungefähr denselben Geschwindigkeitsintervallen ausgeführt wie diejenigen mit Luft und  $\text{CO}_2$  (die Umdrehungszeit der äußeren Kugel variierte von  $\Omega = 0,17$  sec bis  $\Omega = 9400$  sec).

Im besonderen finden wir es beachtenswert, daß weder bei den Gasen, noch im Falle des Wassers eine sprunghafte Änderung des Drehmoments der inneren Reibung mit der Geschwindigkeit zu beobachten war; im Gegenteil änderte sich das Drehmoment mit der Geschwindigkeit immer stetig und nach derselben Gesetzmäßigkeit.

Eine Turbulenz wurde also bei diesen Flüssigkeitsbewegungen nicht beobachtet, obwohl die auftretenden Geschwindigkeiten, besonders im Falle des Wassers, weitaus größer waren als diejenigen, bei welchen bei Strömungen in Röhren schon Turbulenz beobachtet wurde.

Unsere zweite Aufgabe war die experimentelle Untersuchung der Frage, ob das Wasser, wenn es sich relativ zu einem mit ihm in Berührung stehenden festen Körper bewegt, an der Oberfläche dieses festen Körpers vollkommen haftet, oder ob an der Grenzfläche eine Geschwindigkeitsdifferenz bzw. Gleitung statthat.

Unsere Versuche ergaben das Resultat, daß bei den von uns untersuchten Fällen eine Gleitung nicht nachzuweisen ist.

## § 14. Beschreibung der Versuche und deren Ergebnisse.

Unsere Messungen bezüglich der inneren Reibung des Wassers wurden nach der sogen. Ablenkungsmethode vorgenommen, welche von Zemplén bei seinen früheren Untersuchungen zuerst benutzt und ausführlich beschrieben worden ist. Auch der benutzte Apparat, und das ist für das Folgende wichtig, war derselbe, mit welchem Zemplén die innere Reibung von Luft und  $\text{CO}_2$  untersuchte. Der Querschnitt des Apparates ist in der Fig. 1 skizziert.

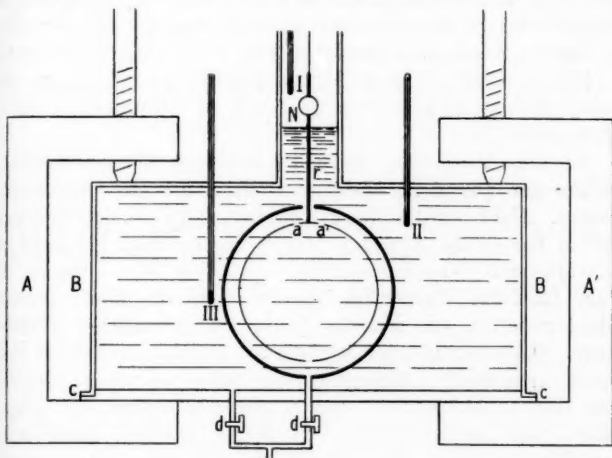


Fig. 1.

Wird die äußere Hohlkugel mit Hilfe eines Uhrwerks oder eines Motors in Rotation versetzt, so übt die zwischen den zwei Hohlkugeln befindliche Flüssigkeitsschicht ein Drehmoment auf die innere, auf einen Draht aufgehängte, schwingende Hohlkugel aus, welche infolgedessen um den Winkel  $\vartheta$  abgelenkt wird. Der dem Winkel  $\vartheta$  entsprechende Ausschlag  $n$  wird auf einer in der Entfernung  $A$  aufgestellten Skala abgelesen. Bestimmt man außerdem die Dauer einer Umdrehung der äußeren Hohlkugel,  $\Omega$ , und mißt man ferner die Schwingungsdauer  $T$  der inneren aufgehängten Kugel, so kann man den Koeffizienten der inneren Reibung mit der weiter unten mitgeteilten Formel berechnen.

Da die Messungen diesmal mit Wasser ausgeführt wurden, so mußten wir am Apparat einige unwesentliche Abänderungen vornehmen. Der Apparat wurde bis zur Höhe  $N$  (Fig. 1) mit Wasser gefüllt. Der so auftretende hydrostatische Druck hob die Metallhülle  $B$  bei  $c$  auf, und das Wasser konnte dort ausfließen. Um das zu vermeiden, haben wir die Klemmschrauben  $A$ ,  $A'$  benutzt, wodurch der Apparat vollkommen schloß. Ferner haben wir an der schwingenden Hohlkugel, hart in der Nähe des Aufhängepunktes, bei  $a$  und  $a'$  je ein Loch von kreisförmigem Querschnitt gebohrt, dessen Durchmesser ungefähr 0,5 mm betrug. Der Apparat wurde nämlich zwecks Vermeidung von Luftblasen von unten her durch die Hähne  $d$  und  $d'$  mit Wasser gefüllt; die Luft aus der inneren Hohlkugel konnte dabei durch die Öffnungen  $a$  und  $a'$  sicher entweichen.

Zu den Messungen wurde destilliertes Wasser benutzt, welches wir aus dem chemischen Institute der Universität bezogen. Nicht nur der Raum zwischen den zwei Kugelflächen, sondern der ganze Apparat, wie er in der Fig. 1 gezeichnet ist, wurde mit Wasser angefüllt. Auf diese Weise waren ungefähr 22 Liter Wasser im Apparat, und die dicke Wasserschicht rund um die Kugeln diente als vorzüglicher Wärmeschutz. Mit einer Füllung wurden im Durchschnitt 2–3 Messungen ausgeführt. Einwandfreier wäre es wohl gewesen, wenn der Aufhängedraht, um störende Einflüsse der Kapillarität ganz auszuschließen, in seiner ganzen Ausdehnung unter Wasser hätte gebracht werden können. Dabei kommt aber auch der Spiegel an der Achse der schwingenden Kugel unter Wasser, was für die Ablesung Schwierigkeiten bereitet. Wir hoben also das Niveau des Wassers bloß bis zum unteren Rande des Spiegels, überzeugten uns aber, daß die Kapillarität keinen störenden Einfluß ausübt, und zwar dadurch, daß wir Messungen bei zwei verschiedenen Dicken (1 mm und 3 mm) der spiegeltragenden Achsen ausführten; ein Unterschied zwischen den Ergebnissen war nicht zu beobachten.

Unsere Messungen teilen sich in zwei Hauptgruppen. Bei der ersten Gruppe waren sowohl die äußere, rotierende, wie auch die innere, schwingende, Hohlkugel dieselben, welche schon Zemplén bei seinen auf Luft und  $\text{CO}_2$  bezüglichen Beobachtungen benutzte. Bei der zweiten Gruppe, welche wir zwecks Untersuchung der Gleitung ausgeführt haben,

benutzten wir statt der alten inneren Kugel eine neue, deren Radius um ungefähr 1 cm kleiner war als derjenige der alten schwingenden Kugel. Die Kombination der Resultate zweier solcher Versuche, bei denen die Radien der inneren Kugeln verschieden sind, gestattet nämlich die Berechnung des Gleitungskoeffizienten. Die neue Hohlkugel wurde in den mechanischen Werkstätten von N. Süss (Budapest) gefertigt. Den Durchmesser  $2r$  bestimmten wir mit Hilfe eines Kathetometers, und zwar zwischen vielen gegenüberliegenden Punkten der Kugeloberfläche. Als Beispiel führen wir hier die Werte auf, die wir in verschiedenen Punkten zweier um  $90^\circ$  voneinander gelegenen Meridianen gemessen haben.

Längs des einen Meridians beobachteten wir für  $r_2$ :

4,1790, 4,1757, 4,1772, 4,1753, 4,1762 cm.

Längs der anderen:

4,1740, 4,1760, 4,1757, 4,1754, 4,1762, 4,1760 cm.

Der Mittelwert aus allen diesen Messungen ergab für den äußeren Radius der inneren kleineren Kugel:

$r_2 = 4,1757$  cm (mit 0,1 Prom. Fehler).

Die Formel

$$(1) \quad \eta = \frac{(R^3 - r_2^3) K}{16 R^3 r_2^3} \cdot \frac{\Omega n}{T^2 A}, ^1)$$

mit deren Hilfe wir aus den gemessenen Versuchsdaten:  $\Omega$ ,  $n$ ,  $T$  und  $A$ , den Koeffizienten der inneren Reibung,  $\eta$ , berechnet haben (wobei bedeutet:  $\Omega$  die Umdrehungsdauer der äußeren Kugel,  $n$  den Skalenausschlag,  $T$  die Schwingungszeit der inneren Kugel in Luft gemessen und schließlich  $A$  den Skalenabstand in halben Skalenteilen gemessen), gilt nur bei äußerst langsamen Rotationen, bzw. liefert sie nur bei großen Werten von  $\Omega$  den eigentlichen Reibungskoeffizienten  $\eta$ . Bei schnelleren Bewegungen, bzw. kleineren Werten von  $\Omega$ , liefert Formel (1) den sogen. scheinbaren Reibungskoeffizienten  $\eta$ .<sup>2)</sup> Die Konstanten in der Formel sind  $R$ , der innere Radius der äußeren Kugel,  $r_2$  der äußere Radius der inneren, schwingenden Kugel, und schließlich  $K$

1) Gy. Zemplén, Ann. d. Phys. **29**. Formel (8.).

2) Gy. Zemplén, Ann. d. Phys. **29**. p. 896. 1909.

das Trägheitsmoment der inneren Kugel. Über die Bestimmung von  $r_2$  war schon oben die Rede; um also die für die kleinere Kugel gültige Formel hinschreiben zu können, war es noch nötig, deren Trägheitsmoment,  $K$  zu bestimmen.  $K$  wurde in der bekannten Weise aus der Beobachtung der Schwingungsdauer erschlossen, indem wir auf einen und denselben Draht zuerst die größere Kugel mit bekanntem Trägheitsmoment und dann die kleine aufhängten und in beiden Fällen die Schwingungszeiten gemessen hatten. Bei größeren Umdrehungsgeschwindigkeiten haben wir die innere Kugel zwecks entsprechender Vergrößerung ihres Trägheitsmomentes mit Bleischrot von 0,4 mm Durchmesser gefüllt. Das vergrößerte Trägheitsmoment wurde in derselben Weise wie vorher bestimmt. In beiden Fällen haben wir die Messung mit Drähten aus verschiedenem Material und von verschiedenem Durchmesser wiederholt. Die einzelnen Bestimmungen zeigten Abweichungen von 3–4 Prom. Auf Grund dieser Bestimmungen ergab sich das Trägheitsmoment der kleineren inneren Kugel, leer, zu

$$K_l = 2682,62 \text{ c}^2\text{-g-Einheiten,}$$

und mit Schrot gefüllt zu

$$K_v = 15133,0 \text{ c}^2\text{-g-Einheiten.}$$

Der Wert von  $R$  ist aus Zempléns früheren Messungen bekannt:

$$R = 5,5645 \text{ cm.}$$

Substituiert man nun diese Werte von  $R$ ,  $r_2$ ,  $K_l$  bzw.  $K_v$  in die Formel (1), so erhält man zur Berechnung von  $\bar{\eta}$  mit der leeren kleinen Kugel

$$(2) \quad \log \bar{\eta} = 0,123754 + \log \Omega + \log n - \log A - 2 \log T$$

und mit der vollen

$$(3) \quad \log \bar{\eta} = 0,875118 + \log \Omega + \log n - \log A - 2 \log T.$$

Zur Berechnung der Versuche, die mit der alten, größeren, inneren Kugel ausgeführt wurden, haben wir die Formel

$$(4) \quad \log \bar{\eta} = 0,762562 - 1 + \log \Omega + \log n - \log A - 2 \log T \dots^1)$$

1) Gy. Zemplén, Ann. d. Phys. 38. Formel (22).

bzw.

(5)  $\log \bar{\eta} = 0,707227 + \log \Omega + \log n - \log A - 2 \log T \dots^1)$   
benutzt.

Da die in Wasser untertauchende Kugel bei ihren Schwingungen auch eine gewisse Wasserschicht mit sich fortreißt, so hat ihr Trägheitsmoment in Wasser einen anderen Wert als in Luft; da wir andererseits aus der Bestimmung der Schwingungsdauer bei gleichbleibendem Trägheitsmoment auf den Torsionsmodul des Aufhängedrahtes schließen wollten, so haben wir die Messung von  $T$  immer in Luft vorgenommen, da die Bestimmung des Trägheitsmomentes  $K$  ebenfalls in Luft erfolgt war.

Die verhältnismäßig große Dämpfung in Wasser hätte eine Bestimmung von  $T$  in Wasser ohnehin ungünstig gestaltet. Übrigens haben wir im Falle der mit Schrot gefüllten Kugel die Trägheitsmomente in Luft und Wasser durch direkte Messung miteinander verglichen und fanden, daß ihre Abweichung voneinander kleiner als 1 Prom. war.

Die ausführlichen Ergebnisse der Messungen finden sich in den Tab. X und XI. Tab. X bezieht sich auf die größere schwingende Kugel, Tab. XI auf die kleinere. In der achten Kolonne der Tabellen findet sich die während der Versuche herrschende Wassertemperatur.

Sie wurde auf den auf  $\frac{1}{5}^{\circ}$  C geteilten Thermometern II und III (vgl. Fig. 1) abgelesen:

$$\theta_{\text{Wasser}} = \frac{\theta_{\text{II}} + \theta_{\text{III}}}{2}.$$

In der neunten Kolonne findet sich die Lufttemperatur im Apparat, die am Thermometer I beobachtet wurde. Bei den langsamsten Umdrehungen war die Umdrehungszeit bei Benutzung der größeren schwingenden Kugel ungefähr 9200 sec, mit der kleineren Kugel ungefähr 4100 sec. Da nun bei Benutzung der kleineren schwingenden Kugel die Dicke der Wasserschicht zwischen der äußeren und der inneren Kugel ungefähr dreimal so groß war als bei Benutzung der größeren Kugel, so war der Geschwindigkeitsgradient längs der Kugel-

1) Gy. Zemplén, 38. Formel (21).

Tabelle X. Die größtschwin

Versuchsnummer	Datum	Material u. Durchmesser des Aufhängerdrahtes	$\Delta$ in halben Skalenteilen	"	$\Delta$
201	25. März 1912	0,1 mm Nickelin	18000 <sup>1)</sup>	198,1	9019,4
202	27. "	"	"	182,95	9027,7
205	30. "	"	"	181,33	9083,3
206	30. "	"	"	185,04	9264,8
203	29. "	"	9000	493,48	3460,0
204	29. "	"	"	508,67	3457,7
207	30. "	"	"	487,06	3473,7
212	18. April 1912	"	9008	521,05	3461,8
208	15. "	"	"	784,88	2389,9
209	16. "	"	"	781,35	2382,2
210	16. "	"	"	756,02	2377,7
211	17. "	"	"	758,76	2390,9
213	18. "	"	8975	582,43	1534,0
216	16. Mai 1912	0,1 mm anderer Nickelindraht	8979	592,02	1587,4
219	18. "	"	"	591,47	1600,0
220	18. "	"	"	602,24	1564,3
214	24. April 1912	"	8975	900,48	975,5
215	26. "	"	"	911,87	979,6
217	17. Mai 1912	"	8979	939,11	1004,8
218	18. "	"	"	953,70	993,3
221	24. "	"	4087	766,24	552,6
222	25. "	"	"	765,35	554,5
223	27. "	"	4084	737,14	547,3
227	27. "	"	"	730,49	546,9
225	29. "	0,3 mm Platin	9081	430,45	18,0
226	1. Juni 1912	"	"	373,62	20,1
228	3. "	"	9085	345,44	22,4
229	3. "	"	"	376,05	20,8
227	1. "	"	9081	834,65	9,5
230	3. "	"	9085	878,65	9,8
231	3. "	"	"	891,26	10,0
232	3. "	"	"	887,44	9,7
233	4. "	"	4272,2	889,48	5,2
234	4. "	"	"	862,58	5,3
235	5. "	"	"	901,85	4,8
236	5. "	"	"	900,06	4,8
237	21. "	0,46 mm Klaviersaiten aus Stahl	4271,2	746,00	2,7
238	21. "	0,7 mm Stahl	"	787,61	2,6
239	22. "	"	"	358,57	1,03
240	23. "	"	"	413,20	0,92
241	24. "	"	"	361,27	1,01
243	24. "	"	"	422,80	0,94
242	24. "	"	"	772,22	0,59
244	24. "	"	"	812,04	0,57
245	24. "	"	"	838,85	0,56
246	24. "	"	"	858,60	0,55
247	31. Dez. 1913	1 mm Stahl	4484	308,02	0,36
248	31. "	"	"	303,77	0,37

1) 1 Skalenteil =  $\frac{1}{2}$  mm.



größt schwingende Kugel.

$n$	$\Omega_{\text{sec}}$	$T_{\text{sec}}$	$\Theta_{\text{Wasser}}$	$\Theta_{\text{Luft}}$	$\bar{\eta}_{\Theta^\circ} \cdot 10^3$	$\bar{\eta}_{18^\circ} \cdot 10^3$
198,1	9019,4	71,727	16,92°	19,00°	1,1168	1,0894
182,93	9027,0	"	18,53°	19,00°	1,0323	1,0462
181,33	9383,6	"	17,95°	19,08°	1,0635	1,0630
185,04	9264,8	"	17,88°	19,70°	1,0716	1,0682
493,45	3460,0	"	18,42°	18,60°	1,0672	1,0779
508,67	3457,1	"	16,96°	18,84°	1,0992	1,0718
487,66	3473,7	"	18,10°	20,50°	1,0588	1,0614
521,06	3461,8	"	18,32°	20,39°	1,1264	1,1340
784,88	2389,9	"	16,40°	19,37°	1,1714	1,1280
781,35	2382,1	"	16,81°	20,44°	1,1624	1,1300
756,02	2377,5	"	18,11°	18,81°	1,1225	1,1253
758,76	2380,9	"	17,90°	19,58°	1,1282	1,1256
582,43	1534,0	"	18,69°	18,90°	1,1200	1,1381
592,02	1587,40	71,387	17,71°	18,40°	1,1888	1,1808
591,47	1600,05	"	17,51°	18,03°	1,1972	1,1843
602,24	1564,30	"	17,61°	17,88°	1,1918	1,1814
900,48	975,5	"	19,36°	19,75°	1,1012	—
911,87	979,6	"	18,74°	20,90°	1,1192	—
939,11	1004,8	"	17,68°	17,42°	1,1937	—
953,70	993,33	"	17,45°	17,70°	1,1956	—
766,24	552,67	"	18,01°	18,70°	1,1769	—
765,35	554,59	"	18,05°	18,06°	1,1796	—
737,14	547,30	"	17,66°	18,50°	1,1221	—
730,49	546,90	"	17,77°	18,75°	1,1111	—
430,45	18,037	6,6611	17,83°	18,29°	1,1154	—
373,62	20,114	"	18,13°	18,40°	1,0810	—
345,44	22,490	"	19,57°	19,10°	1,1171	—
376,06	20,894	"	19,52°	19,22°	1,1298	—
834,63	9,587	"	18,18°	18,89°	1,1511	—
878,65	9,895	"	19,00°	19,00°	1,2502	—
891,26	10,044	"	19,00°	19,03°	1,2873	—
887,44	9,730	"	19,00°	19,32°	1,2399	—
889,48	5,224	"	18,60°	19,20°	1,4189	—
862,58	5,340	"	18,62°	19,24°	1,4066	—
901,83	4,829	"	18,45°	19,00°	1,3299	—
900,06	4,870	"	18,52°	18,90°	1,3385	—
746,66	2,757	11,3705	20,48°	21,00°	1,8995	—
787,61	2,679	"	20,43°	21,20°	1,9471	—
358,57	1,0340	3,9348	19,68°	20,57°	2,8571	—
413,20	0,9261	"	19,75°	20,57°	2,9488	—
361,27	1,0104	"	19,56°	20,00°	2,8129	—
422,30	0,9410	"	19,78°	20,77°	3,0659	—
772,22	0,5950	"	19,66°	20,00°	3,5407	—
812,04	0,5773	"	19,82°	20,84°	3,6125	—
838,85	0,5670	"	19,99°	20,46°	3,6652	—
858,66	0,5553	"	20,01°	20,81°	3,6741	—
308,05	0,3685	1,6649	18,00°	18,50°	4,6536	—
303,77	0,3739	"	18,00°	18,40°	4,6568	—

Tabelle X.

Versuchsnummer	Datum	Material u. Durchmesser des Aufhängedrahtes	A in halben Skalenteilen	n
249	31. Dez. 1913	1 mm Stahl	4484	310,82
250	31. "	"	"	270,73
251	31. "	"	"	436,15
252	31. "	"	"	450,35
253	31. "	"	"	458,87
254	31. "	"	"	462,10
255	29. "	"	"	894,99
256	29. "	"	"	979,57
257	29. "	"	"	949,60
258	29. "	"	"	926,52

Tabelle XI. Die kleineren

Versuchsnummer	Datum	Material u. Durchmesser des Aufhängedrahtes	A in halben Skalenteilen	n
263	27. Mai 1913	Nickelin, 0,06 mm	7614	331,24
264	28. "	"	"	324,26
259	21. "	"	"	594,03
260	23. "	"	"	580,68
261	24. "	"	"	628,52
262	24. "	"	"	586,21
269	4. Juni 1913	Nickelin, 0,1 mm	7943,0	290,27
270	7. "	"	"	302,45
271	9. "	"	"	300,28
272	9. "	"	"	316,15
265	30. Mai 1913	Platin, 0,15 mm	7614	205,18
266	31. "	"	"	212,48
267	31. "	"	"	212,06
268	31. "	"	"	204,83
269	2. Juni 1913	"	3857,4	872,93
270	2. "	"	"	876,93
271	2. "	"	"	858,25
272	2. "	"	"	834,99
273	19. März 1913	Platin, 0,3 mm	7699	375,30
274	19. "	"	"	340,05
275	19. "	"	"	357,46
276	19. "	"	"	406,55
277	15. "	Stahl, 0,3 mm	"	273,30
278	15. "	"	"	273,40
279	15. "	"	"	294,55
280	15. "	"	"	291,08
281	14. "	"	4321	527,01
282	14. "	"	"	517,19
283	14. "	"	"	521,62
284	15. "	"	"	534,62
285	25. Febr. 1913	"	4319	1114,3
286	25. "	"	"	1119,5

le X.  
(Fortsetzung.)

$n$	$\Omega_{\text{sec}}$	$T_{\text{sec}}$	$\Theta_{\text{Wasser}}$	$\Theta_{\text{Luft}}$	$\bar{\eta}_{\Theta^{\circ}} \cdot 10^3$	$\bar{\eta}_{18^{\circ}} \cdot 10^3$
310,82	0,3631	1,6649	18,00°	18,35°	4,6272	—
270,73	0,3994	..	18,00°	18,25°	4,4333	—
436,15	0,2926	..	17,92°	19,00°	5,2323	—
450,35	0,2848	..	17,96°	18,90°	5,2587	—
458,87	0,2815	..	17,99°	18,80°	5,2961	—
462,10	0,2805	..	18,00°	18,69°	5,3144	—
894,99	0,1780	..	18,51°	21,00°	6,5316	—
979,57	0,1762	..	18,65°	20,40°	7,0746	—
949,60	0,1731	..	18,76°	20,10°	6,7394	—
926,52	0,1752	..	18,80°	20,00°	6,6539	—

kleiner schwingende Kugel.

$n$	$\Omega_{\text{sec}}$	$T_{\text{sec}}$	$\Theta_{\text{Wasser}}$	$\Theta_{\text{Luft}}$	$\bar{\eta}_{\Theta^{\circ}} \cdot 10^3$	$\bar{\eta}_{18^{\circ}} \cdot 10^3$
331,24	4114,75	149,190	16,85°	18,00°	1,0694	1,0389
324,26	4129,75	..	17,27°	19,00°	1,0507	1,0317
594,03	2248,06	..	17,20°	18,30°	1,0478	1,0268
580,68	2292,00	..	16,68°	18,00°	1,0443	1,0090
628,52	2186,0	..	16,56°	17,85°	1,0780	1,0390
586,21	2305,3	..	16,83°	17,82°	1,0603	1,0300
290,27	647,12	56,877	21,35°	22,00°	0,9720	1,0555
302,45	635,20	..	21,29°	22,10°	0,9941	1,0761
300,28	664,80	..	19,80°	21,34°	1,0330	1,0796
316,15	626,20	..	19,82°	21,50°	1,0245	1,0711
205,18	123,827	20,3566	18,49°	19,40°	1,0707	1,0842
212,48	121,100	..	17,84°	18,36°	1,0844	1,0804
212,08	121,137	..	17,87°	18,40°	1,0827	1,0797
204,83	126,175	..	17,92°	18,52°	1,0892	1,0872
872,93	21,994	..	18,59°	19,50°	1,597	—
876,93	21,800	..	18,60°	19,50°	1,590	—
858,25	22,398	..	18,63°	19,60°	1,599	—
834,99	22,733	..	18,71°	19,77°	1,579	—
375,30	9,526	5,2670	17,15°	19,35°	2,225	—
340,05	10,050	..	17,58°	18,20°	2,127	—
357,46	9,782	..	17,58°	18,22°	2,177	—
406,55	9,024	..	17,58°	18,25°	2,284	—
273,30	5,4744	3,1076	17,02°	21,17°	2,675	—
273,40	5,5056	..	17,12°	21,11°	2,692	—
294,55	5,2020	..	17,23°	21,02°	2,740	—
291,08	5,2550	..	17,29°	21,00°	2,735	—
527,01	2,2294	..	16,91°	20,10°	3,743	—
517,19	2,2740	..	16,98°	20,10°	3,747	—
521,62	2,2600	..	17,09°	20,10°	3,756	—
534,62	2,3770	..	16,26°	19,37°	4,049	—
1114,3	1,3589	..	15,07°	16,20°	4,827	—
1119,5	1,3201	..	15,08°	16,05°	4,711	—

Tabelle X

Versuchsnummer	Datum	Material u. Durchmesser des Aufhängedrahtes	A in halben Skalenteilen	"	"
287	25. Febr. 1913	Stahl, 0,3 mm	4319	1104,4	1,34
288	14. März 1913	"	4321	1077,1	1,34
289	13. Febr. 1913	Stahl, 0,5 mm	4329	301,4	0,72
290	13. "	"	"	329,7	0,68
291	13. "	"	"	330,1	0,68
292	13. "	"	"	326,5	0,69
293	12. "	"	"	544,2	0,48
294	12. "	"	"	498,3	0,51
295	12. "	"	"	559,5	0,47
296	12. "	"	"	517,9	0,50
297	11. "	"	"	770,2	0,38
298	12. "	"	"	759,5	0,38
299	12. "	"	"	809,2	0,37
300	12. "	"	"	723,1	0,40
301	17. "	Stahl, 0,7 mm	"	868,9	0,20

radien im Falle der kleineren inneren Kugel schon bei Umdrehungszeiten von 4100 sec kleiner als mit der größeren schwingenden Kugel bei Umdrehungszeiten von 9200 sec. Bei den schnellsten Rotationen war die Umdrehungszeit ungefähr 0,16 sec. Schnellere Umdrehungen konnten wir in der jetzigen Zusammenstellung des Apparates nicht erzielen. Bei so schnellen Umdrehungen erwies sich nämlich auch das Trägheitsmoment der mit Schrot gefüllten Kugeln als zu klein; die schwingenden Kugeln gerieten in starke Nutation und schlugen an die Wand der äußeren rotierenden Kugel auf. Im allgemeinen haben wir bei einer und derselben Umdrehungsgeschwindigkeit immer vier Messungen ausgeführt.

Im Falle langsamer Umdrehungen, wo noch in den Grundgleichungen der Hydrodynamik die Glieder

$$u \frac{\partial u}{\partial x}, \dots \text{ usw.}$$

zu vernachlässigen sind, ist das auf die schwingende Kugel ausgeübte Drehmoment  $\eta$  proportional, und  $\eta$  ist unabhängig von  $\Omega$ . Bei so langsamen Umdrehungen ist  $\bar{\eta} = \eta$ , d. h. Formel (1) liefert direkt den Wert von  $\eta$ . Die Unabhängigkeit des Reibungskoeffizienten  $\eta$  von  $\Omega$  gibt zugleich ein Kriterium, um beurteilen zu können, welche Umdrehungen noch als „langsam genug“ zu betrachten sind. Es ist ja evident, daß

elie X Fortsetzung.)

n	$\Omega_{\text{sec}}$	$T_{\text{sec}}$	$\Theta_{\text{Wasser}}$	$\Theta_{\text{Luft}}$	$\bar{\eta}_{\Theta} \cdot 10^2$	$\bar{\eta}_{18^\circ} \cdot 10^2$
1104,1	1,3446	3,1076	15,09°	15,90°	4,736	—
1077,1	1,3401	"	16,83°	20,05°	4,599	—
301,4	0,7292	2,5376	17,00°	20,55°	5,915	—
329,7	0,6856	"	17,11°	20,67°	6,083	—
330,1	0,6869	"	17,28°	20,85°	6,102	—
326,7	0,6914	"	17,40°	21,00°	6,074	—
544,2	0,4860	"	16,88°	19,25°	7,116	—
498,4	0,5150	"	16,99°	19,25°	6,911	—
559,5	0,4745	"	17,06°	19,15°	7,143	—
517,0	0,5040	"	17,13°	19,12°	7,011	—
770,2	0,3843	"	15,86°	18,99°	7,964	—
759,5	0,3839	"	16,70°	19,05°	7,846	—
809,2	0,3701	"	16,73°	19,09°	8,058	—
723,4	0,4000	"	16,76°	19,09°	7,790	—
868,0	0,2058	1,7832	14,61°	18,20°	9,741	—

Um-  
eren  
sec.  
un-  
r in  
elen.  
das  
s zu  
ation  
Kugel  
Um-  
t.  
und-

man diejenigen Umdrehungen als solche zu betrachten hat, bei denen die aus der Formel (1) berechneten Werte von  $\eta$  beim Anwachsen der Umdrehungsgeschwindigkeit keine nennenswerte Vergrößerung erfahren.

Die Werte von  $\eta$  aus diesen langsamsten Umdrehungen bestimmt, und auf eine und dieselbe Temperatur, 18°, reduziert, ergeben denjenigen Wert von  $\eta$ , der unseren weiteren Berechnungen zugrunde liegt. Die Reduktion auf 18° haben wir mit der v. Helmholtz'schen<sup>1)</sup> Formel

$$\eta = \frac{0,0178}{1 + 0,0887 \Theta + 0,000220 \Theta^2}$$

in der Weise ausgeführt, daß wir zu dem beobachteten  $\eta_{\Theta}$  die aus der Formel berechnete Differenz  $\eta_{18^\circ} - \eta_{\Theta}$  zugefügt haben. Die auf diese Weise korrigierten Werte finden sich in der elften Kolonne der Tabellen und sind mit einer Klammer bezeichnet. Diese Werte sind nahe konstant, insbesondere zeigen sie mit dem Wachsen der Umdrehungsgeschwindigkeit keine nennenswerte Vergrößerung. Deren Mittelwert ergibt als wahrscheinlichsten Wert auf Grund unserer Messungen:

$$\eta_{18^\circ} = 1,0562 \cdot 10^{-2}.$$

1) H. Lamb, Lehrbuch der Hydrodynamik, p. 663.

Die folgende Tabelle<sup>1)</sup> zeigt, daß unser Wert sich in guter Übereinstimmung mit denjenigen anderer Beobachter befindet.

Beobachter	Beobachtungsmethode	Der innere Reibungskoeffizient des Wassers bei 17,5° C.
Poiseuille 1846 . . . . .	Ausfluß aus Kapillarröhren	0,01076
Sprung 1876 , . . . . .	„ „ „	0,01065
Slotte 1883 . . . . .	„ „ „	0,01075
Thorpe und Rodger 1894	„ „ „	0,01067
W. König 1887 . . . . .	Schwingung einer Vollkugel	0,01099
K. Mützel 1891 . . . . .	„ eines Hohlzylinders	0,01082
R. Ladenburg 1908 . . .	„ einer Hohlkugel	0,01065
Zemplén und Pogány 1914	Ablenkungsmethode	0,01069

Die Werte von  $\bar{\eta}$ , die in der zehnten Kolonne der Tab. X und XI zu finden sind, können natürlich bei der Beurteilung der prozentualen Abweichung der einzelnen Messungen nicht maßgebend sein, da  $\bar{\eta}$  sowohl mit der Temperatur wie mit  $\Omega$  sich beträchtlich ändert, und innerhalb einer aus vier Messungen bestehenden Gruppe variierte sowohl die Wassertemperatur, wie auch mit dem Motor genau dieselbe Geschwindigkeit wiederholt herzustellen nicht gut möglich war.

#### § 15. Vergleichung der Beobachtungsergebnisse mit der Theorie.

Bei äußerst langsamen Bewegungen, sogen. unendlich kleinen Geschwindigkeiten, ist das Drehmoment, welches von der zwischen den zwei konzentrischen Kugeln befindlichen Flüssigkeit auf die innere Kugel bei einer gleichförmigen Rotation der äußeren Kugel ausgeübt wird, proportional  $\eta$ , dem Koeffizient der inneren Reibung. Bei endlichen Geschwindigkeiten hört diese Proportionalität auf, vielmehr wird das Drehmoment dem scheinbaren Reibungskoeffizienten, dem  $\bar{\eta}$ , proportional, wobei  $\bar{\eta}$  eine Funktion von  $\Omega$  ist.

Zemplén hat in einer früheren Arbeit die Form dieser Funktion unter gewissen Bedingungen, welche die von uns untersuchten Bewegungen erfüllen, bestimmt. Es ist

$$(6) \quad \bar{\eta} = \eta \left( 1 + B_2 \frac{\eta^2}{\Omega^2} + B_4 \frac{\eta^4}{\Omega^4} + \dots \right).$$

1) R. Ladenburg, Ann. d. Phys. 27. p. 182 1907.

Dabei bezeichnet  $\varrho$  die Dichte der Flüssigkeit oder des Gases,  $\eta$  den inneren Reibungskoeffizienten und  $\Omega$  die Zeit einer Umdrehung der äußeren Kugel.

Die  $B_2, B_4 \dots B_{2k} \dots$  sind Konstanten, die unabhängig sind von der Substanz und vom Zustand der untersuchten Gase oder Flüssigkeiten und nur von den Dimensionen des Apparates abhängen. Bei äußerst langsamen Bewegungen, wo  $\Omega = \infty$ , ist  $\bar{\eta} = \eta$ . Wenn wir an beiden Seiten der Gleichung (6) mit  $\eta$  dividieren und

$$\frac{\varrho}{\eta \Omega} = x$$

schreiben, so wird:

$$\frac{\bar{\eta}}{\eta} = 1 + B_2 x^2 + B_4 x^4 + \dots = H(x).$$

Aus der Theorie folgt also, daß  $H(x)$  eine für unseren Apparat charakteristische Funktion ist, und zwar bis zu der Geschwindigkeitsgrenze, bis zu welcher die Grundgleichungen der Hydrodynamik gelten.

Oberhalb dieser Grenze werden die  $B_{2k}$  im allgemeinen nicht mehr unabhängig sein von den materiellen Eigenschaften der untersuchten Flüssigkeit oder Gases, d. h. wenn wir

$$\frac{\bar{\eta}}{\eta} = H(x)$$

für einen und denselben Wert von  $x$ , aber mit verschiedenen Flüssigkeiten oder Gasen ermitteln, so erhalten wir im allgemeinen voneinander verschiedene Werte für  $H(x)$ .

Der Zweck unserer Untersuchungen war, diese theoretischen Folgerungen experimentell zu bestätigen; in erster Linie also, daß  $\bar{\eta}/\eta$ , an verschiedenen Flüssigkeiten und Gasen als Funktion von  $x$  ermittelt, eine und dieselbe Funktion  $H(x)$  liefert.

Zemplén hat an  $\text{CO}_2$  und Luft ein Stück der auf die größere innere Kugel bezüglichen Funktion  $H(x)$  schon bestimmt, und zwar so, daß er die  $B_{2k}$  mit der Methode der kleinsten Quadrate ermittelte. Bei diesen Rechnungen bot die Temperaturkorrektur einige Schwierigkeit; denn solange die  $B_{2k}$  unbekannt waren, konnte man die  $\bar{\eta}$  nicht auf eine und dieselbe Temperatur reduzieren, andererseits konnte man ohne Reduktion die Werte von  $B_{2k}$  nicht gut ermitteln. Zemplén hat deshalb eine Art sukzessive Approximation

angewendet. Da aber der innere Reibungskoeffizient des Wassers sich mit der Temperatur stark verändert, so konnten mit dieser Methode im Falle des Wassers keine Erfolge erzielt werden. In vorliegender Abhandlung haben wir sowohl die alten Zemplénschen wie auch unsere neueren Messungen auf eine viel einfachere und übersichtlichere Art aufgearbeitet, indem wir die mit einer und derselben Flüssigkeit bzw. Gas, aber bei verschiedenen Temperaturen ausgeführten Messungen so behandeln, als ob sie sich auf verschiedene Flüssigkeiten bzw. Gase beziehen würden; tatsächlich ist ja  $H$  nur eine Funktion von

$$x = \frac{\varrho}{\eta \Omega},$$

wenn also nur  $\varrho$  und  $\eta$  sich auf eine und dieselbe Temperatur beziehen, so ist der so gewonnene Wert von  $H(x)$  unabhängig sowohl von den materiellen Eigenschaften wie von der Temperatur der Flüssigkeit. Auf eine Temperaturreduktion kann man also überhaupt verzichten. Bestimmt man  $H(x)$  mit irgend einer Flüssigkeit oder Gas bei irgend einer Temperatur, so müssen alle diese Werte von  $H(x)$  längs einer und derselben Kurve liegen, und das kann man am einfachsten graphisch kontrollieren. Die zueinander gehörigen Werte von  $x$  und  $\bar{\eta}/\eta$  sind in der Tab. XII zusammengestellt.

Tabelle XII.

Luft		CO <sub>2</sub>		Wasser			
$x$	$\bar{\eta}/\eta$	$x$	$\bar{\eta}/\eta$	$x$	$\bar{\eta}/\eta$	$\Theta$	$\Omega_{\text{sec}}$
1,2	0,98	1,8	0,96	0,17	1,08	17,91°	550,36
5,0	1,03	6,3	1,01	4,73	1,08	18,76°	20,383
7,1	1,06	8,5	1,04	9,8	1,19	18,70°	9,814
8,3	1,07	10,2	1,12	18,9	1,32	18,54°	5,065
9,7	1,16	13,3	1,21				
11,9	1,13	14,9	1,28	36,8	1,92	20,45°	2,718
20,0	1,37	26,7	1,50	100,9	2,88	19,69°	0,9779
22,7	1,41	43,3	1,90	172,9	3,59	19,87°	0,5736
29,5	1,57	68,5	2,24	251,7	4,35	18,00°	0,3762
37,0	1,70	86,9	2,50	332,5	5,00	17,97°	0,2848
41,6	1,78	107,0	2,78	545,5	6,60	18,70°	0,1766
62,2	2,17						

Die Werte für Luft und CO<sub>2</sub> in den ersten vier Kolonnen der Tab. XII sind aus den älteren Messungen Zempléns berechnet, und in der fünften und sechsten Kolonne finden



sich die jetzt an Wasser bestimmten Werte. In die Tab. XII sind natürlich nur solche Messungen aufgenommen, bei welchen  $\Omega$  schon so klein war, daß  $\bar{\eta}$  sich mit dem Wachsen der Um-drehungsgeschwindigkeit merklich vergrößerte.

Jeder Wert von  $x$  und  $\bar{\eta}/\eta$  ist ein Mittelwert aus vier Messungen, den wir auf folgende Weise erhielten: Zuerst haben wir den Mittelwert der Wassertemperaturen und der Um-drehungszeiten,  $\Theta$  und  $\Omega$  aus den vier einzelnen Messungen gebildet; diese finden sich in der siebenten bzw. achten Kolonne der Tab. XII. Dann haben wir den von uns bestimmten Wert  $\eta_{18^\circ} = 1,0562 \cdot 10^{-2}$  mit Hilfe der v. Helmholtzschen Formel auf  $\eta_\Theta$  reduziert. Dann ist

$$\frac{\eta}{\eta_\Theta \Omega} = x$$

und der Mittelwert  $\bar{\eta}_\Theta$  aus den einzelnen  $\bar{\eta}$ , dividiert durch  $\eta_\Theta$  ergibt den zu  $x$  gehörigen Wert von  $\bar{\eta}/\eta$ .

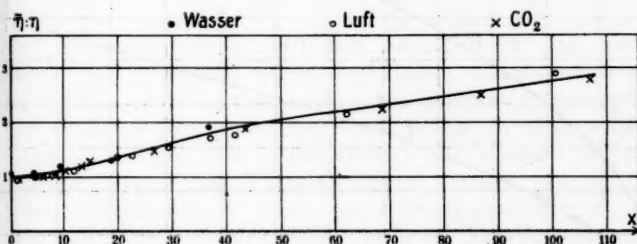


Fig. 2.

Tab. XII ist in Fig. 2 graphisch dargestellt. Die ausgezogene Kurve ist die Funktion  $H(x)$ . Die Bedeutung der auf verschiedene Weise markierten Punkte ist aus der Figur ersichtlich. Die Kurve erstreckt sich auf das Intervall von  $x=0$  bis  $x=100$ ; die Messungen an Luft und  $\text{CO}_2$  beziehen sich nämlich nur auf dieses Intervall. Man sieht, daß wir die theoretische Folgerung experimentell bestätigt finden; denn sämtliche Punkte von Luft,  $\text{CO}_2$  und Wasser schließen sich in gleicher Weise der Kurve an. Die Konstanten  $B_{2k}$  sind also tatsächlich unabhängig von den materiellen Eigenschaften des benutzten Gases bzw. Flüssigkeit, zum mindesten bis

zur Geschwindigkeitsgrenze bzw. zu dem Werte von  $x$ , bis zu welchem sich Fig. 2 erstreckt.

Die größte relative Abweichung zwischen den experimentell bestimmten Punkten und der graphisch interpolierten Kurve besteht gerade bei den kleinsten Geschwindigkeiten, wo bei Gasen die Funktion  $H(x)$  aus bisher noch unerforschten Gründen ein schwaches, aber gut beobachtbares Minimum besitzt; die Abweichung beträgt hier 8 Proz. Bei größeren Geschwindigkeiten werden die relativen Abweichungen immer kleiner und sind nie größer als 4–5 Proz.

Wie aus Tab. XII ersichtlich, konnte man  $H(x)$  an Wasser bis zu  $x = 545,5$  bestimmen. Die Kurve in ihrer ganzen Ausdehnung ist in Fig. 3 dargestellt.

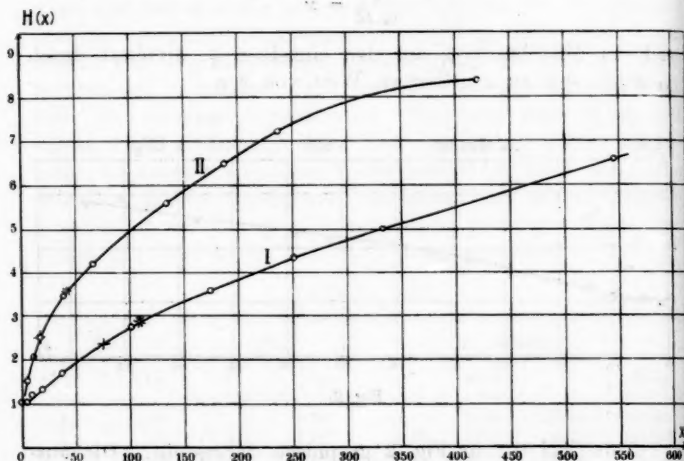


Fig. 3.

Mit der kleineren schwingenden Kugel haben wir  $\eta/\eta$  ebenfalls als Funktion von  $x$  bestimmt. Mit der kleineren Kugel an Luft oder  $\text{CO}_2$  ausgeführte Messungen standen uns leider nicht zur Verfügung. Tab. XIII bzw. Fig. 3 zeigt  $\eta/\eta$  als Funktion von  $x$  im Falle der Benutzung der kleinen Kugel.

Die Kurve I in der Fig. 3 bezieht sich auf die größere schwingende Kugel, Kurve II auf die kleinere.

Tabelle XIII.

$x$	$\frac{\bar{\eta}}{\eta}$	$\theta$	$\Omega_{\text{sec}}$
4,3	1,53	18,63	22,231
9,7	2,06	17,47	9,595
17,3	2,51	17,16	5,3592
46,1	3,52	16,81	2,2851
66,2	4,20	15,52	1,3409
133,0	5,61	17,20	0,6983
187	6,50	17,01	0,4948
237	7,24	16,51	0,3845
421	8,43	14,61	0,2058

Es ist bemerkenswert:

1. Daß im Falle der kleineren Kugel die Funktion  $H(x)$  für jeden Wert von  $x$  einen größeren Wert besitzt als im Falle der größeren Kugel, was sich mit theoretischen Überlegungen in guter Übereinstimmung befindet.  $H(x)$  mißt nämlich gewissermaßen die Abweichung des Bewegungszustandes von derjenigen Bewegung, bei welcher die Winkelgeschwindigkeit auf konzentrischen Kugelflächen konstant ist. Zu dieser lamellaren Bewegung, welche bei kleinen Geschwindigkeiten tatsächlich statthat, treten noch bei größeren Geschwindigkeiten Zirkulationsströmungen hinzu, welche zu einem schnelleren Anwachsen des Drehmomentes der inneren Reibung führen. Solche Zirkulationsströmungen können sich um so leichter ausbilden, je dicker die Flüssigkeitsschicht ist, da ja in der Nähe der starren Kugelwände die Winkelgeschwindigkeit auf konzentrischen Kugelflächen konstant ist; es ist also zu erwarten, daß bei der kleineren Kugel, wo die Zirkulationsströmungen stärker sind, auch  $H(x)$  größer wird.

Das auf die größere Kugel wirkende Drehmoment der inneren Reibung war indessen natürlich immer größer als das Drehmoment auf die kleine Kugel; bei langsamen Bewegungen verhalten sich die auf die große und kleine Kugel wirkenden Drehmomente bei gleichen Umdrehungsgeschwindigkeiten der äußeren Kugel wie 459:126,  $H(x)$  dagegen erreichte im Falle der kleinen Kugel bei den vorliegenden Geschwindigkeiten nicht einmal das Zweifache seines im Falle der großen Kugel zu demselben  $x$  gehörigen Wertes. Das auf die größere Kugel wirkende Drehmoment war also stets das größere.

2. Die Kurven I und II ändern sich nirgends sprungweise, noch zeigen sie eine Änderung ihres Charakters; die Gesetzmäßigkeit der Flüssigkeitsbewegung hat sich also nicht geändert. Ein neuer Bewegungszustand, Turbulenz, trat nicht ein. Wir wollen nun dieses Resultat mit der Regel<sup>1)</sup> von Reynolds vergleichen, nach welcher bei Strömung durch ein Rohr von kreisförmigem Querschnitt Turbulenz eintritt, sobald

$$(9) \quad \frac{U \varrho a}{\eta} > 1000$$

ist, wobei  $U$  die Strömungsgeschwindigkeit und  $a$  den Radius des Rohres bezeichnet. Der aus Formel (9) berechnete Wert von  $U$  heißt kritische Geschwindigkeit.

In unserem Falle ist die tangentielle Geschwindigkeit an der äußeren Kugel:

$$U_R = R \cdot \frac{2\pi}{\Omega} = R \Psi$$

und an der inneren gleich Null; die mittlere Geschwindigkeit im Querschnitt ist im Falle sehr langsamer Bewegungen leicht zu berechnen:

$$(10) \quad U = \overline{r \psi} = \frac{\int_0^R r \psi \cdot 4\pi r^2 dr}{\frac{4\pi}{3} (R^3 - r_2^3)};$$

entnimmt man den Wert von  $\psi$  der ersten Abhandlung Zempléns<sup>2)</sup>, so erhält man:

$$(11) \quad U = \frac{3R^2}{4(R^3 - r_2^3)^2} \cdot R \Psi \cdot (R^4 - 4Rr_2^3 + 3r_2^4),$$

also

$$(12) \quad \frac{U}{R \Psi} = \frac{3R^2 (R^4 - 4Rr_2^3 + 3r_2^4)}{4(R^3 - r_2^3)^2}$$

Die mittlere Geschwindigkeit ist also bei der kleinen Kugel 0,58mal, bei der größeren Kugel 0,52mal die maximale Geschwindigkeit. Auf alle Fälle ist also bei hinreichend langsamen Bewegungen die mittlere Geschwindigkeit größer als die Hälfte der maximalen Geschwindigkeit. Bei schnelleren Drehungen wächst der Geschwindigkeitsgradient in der Nähe

1) O. Reynolds, Enzykl. d. math. Wiss. (IV). 3. p. 78.

2) Gy. Zemplén, Ann. d. Phys. 29. p. 876. 1909.

der inneren Kugel; die mittlere Geschwindigkeit wird also relativ noch größer. Die Ungleichung

$$(13) \quad U > \frac{1}{2} R \Psi$$

wird also immer erfüllt sein.

Die Bedingung (9) wird also erfüllt sein, sobald

$$(13a) \quad R \Psi \cdot \frac{\eta a}{\eta} > 2000.$$

In unserem Falle spielt die Dicke der Flüssigkeitsschicht,  $R - r_2$ , die Rolle des Radius vom Strömungsrohr, da bei unserer Bewegung die maximale Geschwindigkeit an der äußeren Kugelfläche auftritt, während im Strömungsrohr in der Rohrachse. Da nun

$$\Psi = \frac{2\pi}{\Omega} \quad \text{und} \quad x = \frac{\eta \Psi}{2\pi \eta}$$

ist, so wird das Reynoldssche Kriterium

$$(14) \quad R(R - r_2)x > 320.$$

Nach diesen Überlegungen mußte man also mit der kleinen Kugel Turbulenz erhalten bei

$$(15) \quad x > 41$$

und mit der großen Kugel bei

$$(16) \quad x > 108.$$

Diese Punkte der Kurven I und II haben wir in der Fig. 3 mit Sternchen bezeichnet. Aus den Kurven ist aber ersichtlich, daß weder bei diesen kritischen Geschwindigkeiten, noch bei den beobachteten größeren Geschwindigkeiten Turbulenz auftritt. Noch kleinere Werte für die untere Grenze der Turbulenz erhält man, wenn man die maximalen Geschwindigkeitsgradienten miteinander vergleicht, wie es Zemplén<sup>1)</sup> in seiner zweiten Abhandlung tat. Für den mittleren Geschwindigkeitsgradienten, bei welchem Turbulenz eintreten soll, erhält man auf Grund des Reynoldsschen Kriteriums:

$$(17) \quad \frac{U}{a} > \frac{1000 \eta}{a^2 \eta}.$$

Nun ist der maximale Wert des Geschwindigkeitsgradienten an der Wand des Rohres dreimal<sup>2)</sup> so groß wie der mittlere

1) Gy. Zemplén, Ann. d. Phys. 38, p. 123. 1912.

2) H. Lamb, Lehrbuch der Hydrodynamik, p. 672. Formel (3).

Gradient, also

$$(18) \quad \left( \frac{\partial u}{\partial r} \right)_{r=a} > \frac{3000 \eta}{a^3 q}.$$

Um nun den Gradienten der Geschwindigkeit in unserem Falle eines von zwei konzentrischen Kugeln begrenzten Flüssigkeitsraumes zu bestimmen, verfahren wir auf folgende Weise: Wir berechnen zuerst den Geschwindigkeitsgradienten im Falle äußerst langsamer Bewegungen; es wird <sup>1)</sup>:

$$(19) \quad \left( \frac{d(r\psi)}{dr} \right)_{r=r_1} = \frac{6\pi R^3}{(R^3 - r_2^3) \Omega}.$$

Der maximale Geschwindigkeitsgradient wird demnach bei der größeren Kugel

$$(20) \quad \gamma_0 = \frac{70}{\Omega},$$

bei der kleineren

$$(21) \quad \gamma_0' = \frac{32}{\Omega}.$$

Da nun das Drehmoment der inneren Reibung dem an der inneren Kugelfläche auftretenden Geschwindigkeitsgradienten proportional ist, so können wir auf die Änderung des letzteren aus der Änderung des Drehmomentes schließen, die es bei größeren Geschwindigkeiten erleidet. Man erhält also die bei großen Geschwindigkeiten auftretenden Gradienten durch Multiplikation von  $\gamma_0$  mit  $H(x)$ . Auf Grund dieser Überlegungen liefert Formel (18) als Kriterium der Turbulenz

$$H(x) \cdot \gamma_0 > \frac{3000 \eta}{a^3 q}.$$

Also bei der größeren Kugel:

$$70 \cdot H(x) \frac{q}{\Omega \eta} > 12000,$$

d. h.

$$(22) \quad x H(x) > 172$$

und bei der kleineren

$$(23) \quad x H(x) > 47.$$

Aus den Figg. 2 und 3 überzeugt man sich, daß bei der größten Geschwindigkeit ( $x = 65$ ,  $H(x) = 2,2$ ) der mit Luft ausgeführten Messungen die Grenze (22) noch nicht erreicht wurde; dagegen liegen die Werte ( $x = 101$ ,  $H(x) = 2,9$ ) der

1) Gy. Zemlén, Ann. d. Phys. 38. p. 122. 1912.

größten Geschwindigkeit bezüglich  $\text{CO}_2$  schon weit oberhalb dieser Grenze. Aber noch beträchtlicher werden die durch die Ungleichungen (22) und (23) festgelegten Grenzggeschwindigkeiten überstiegen durch die Messungen, die wir an Wasser ausgeführt haben. Die Punkte, bei welchen nach dieser zweiten Berechnungsweise bei Wasser Turbulenz eintreten sollte, sind in der Fig. 3 mit + bezeichnet.

Man sieht also, daß bei der von uns betrachteten Art der Flüssigkeitsbewegung das Reynoldssche Kriterium versagt, indem Turbulenz noch bei viel größeren Geschwindigkeiten als die von dem Kriterium geforderte Grenzggeschwindigkeit nicht auftritt. Diese Erfahrungen bestätigen die Vermutung, der Zemplén<sup>1)</sup> schon Ausdruck verliehen hat, daß nämlich das Auftreten der Turbulenz beim Strömen durch Röhren im wesentlichen dem störenden Einfluß der Enden zu verdanken ist; wo aber solche störende Einflüsse fehlen, dort bleibt die Bewegung bis zu viel größeren Geschwindigkeiten geordnet.

### 3. Die Entgegnung von Lord Rayleigh und Lamb<sup>2)</sup>.

Lord Rayleigh und Lamb fanden auf Grund theoretischer Überlegungen, daß die Formel (1) für langsame Bewegungen nur dann gilt, wenn

$$(24) \quad \frac{\psi r_1^2 \varrho}{\eta} < 1, \quad \psi < \frac{\eta}{\varrho r_1^2}$$

ist. Zemplén<sup>3)</sup> fand, daß die Formel (1) bei Luft und  $\text{CO}_2$  noch bei Geschwindigkeiten, die 50–100mal so groß sind als die aus (24) resultierende Grenzggeschwindigkeit, brauchbar ist. Wir wollen nun untersuchen, wie es sich mit diesem Rayleigh-Lamb'schen Kriterium bei Wasser verhält. Es ist bei Wasser  $\eta/\varrho = 0,0106$ ; also wird (24) für die kleine Kugel

$$(25) \quad \Omega > 10000$$

und für die große Kugel

$$(26) \quad \Omega > 14000.$$

Es liegen demnach die Geschwindigkeiten, mit denen unsere Versuche ausgeführt wurden, alle oberhalb der Grenze, oberhalb welcher nach Rayleigh und Lamb die Formel (1)

1) Gy. Zemplén, Ann. d. Phys. 38. p. 124. 1912.

2) Lord Rayleigh, Phil. Mag. (5) 36. p. 365, 1893 und H. Lamb, Lehrbuch der Hydrodynamik, p. 678. 1907.

3) Gy. Zemplén, Ann. d. Phys. 38. p. 86. 1912.

aufhört, gültig zu sein. Trotzdem ist, wie aus den Tabb. XI und XII ersichtlich,  $\bar{\eta}$  konstant, bei der größeren Kugel von  $\Omega = 9800$  sec bis  $\Omega = 9460$  sec und bei der kleineren von  $\Omega = 4000$  sec bis  $\Omega = 2000$  sec. Bei Wasser beginnt also  $\eta$  eher zu wachsen als bei Luft und  $\text{CO}_2$ , selbst wenn man die  $x = \varrho/\eta\Omega$  als Veränderliche heranzieht.

$\bar{\eta}$  beginnt zu wachsen bei Luft für

$$(27) \quad x > 0,3,$$

bei  $\text{CO}_2$  für

$$(28) \quad x > 4,3.$$

Bei Wasser beginnt das Wachstum mit der größeren Kugel für

$$(29) \quad x > 0,03,$$

und mit der kleineren für

$$(30) \quad x > 0,05.$$

Nun ist das Rayleigh-Lambsche Kriterium in  $x$  ausgedrückt:

$$(31) \quad x > \frac{1}{2\pi r_1^2},$$

also für die größere Kugel

$$(32) \quad x > 0,006,$$

und für die kleinere

$$(33) \quad x > 0,009.$$

Man sieht aus diesen Zahlen, daß die Schätzung der englischen Gelehrten nur für Luft und  $\text{CO}_2$  zu klein ausfällt, für Wasser aber der Wirklichkeit bedeutend näher kommt, indem schon bei einer Geschwindigkeit, die fünfmal größer ist als die von ihnen geforderte, das Wachstum von  $\bar{\eta}$  tatsächlich beginnt.

#### § 16. Gleitung an der Grenze Wasser-Kupfer.

Bei allen bisherigen Überlegungen haben wir vorausgesetzt, daß die Flüssigkeit und ein mit ihr in Berührung stehender starrer Körper an der Berührungsstelle gemeinsame Geschwindigkeit besitzen, daß also eine Gleitung nicht vorhanden ist. Die Berechtigung dieser Voraussetzung wird schon dadurch wahrscheinlich gemacht, daß  $H(x)$ , an Luft,  $\text{CO}_2$  und Wasser ermittelt, sich nur als eine Funktion von  $x = \varrho/\eta\Omega$  erwies; würde nämlich eine Gleitung stattfinden,



so müßte  $H(x)$  offenbar auch von dem numerischen Werte der Gleitungskoeffizienten abhängen, könnte also von der untersuchten Materie nicht unabhängig sein.

Dessenungeachtet ist es erwünscht, die Größe der Gleitung durch direkte Versuche zu untersuchen, denn es ist ja nicht ausgeschlossen, daß kleinere Schwankungen der Werte von  $H$  gerade auf die Rechnung des vernachlässigten Gleitungskoeffizienten zu setzen sind.

Experimentelle Untersuchungen des gleichen Zweckes wurden schon viele ausgeführt. Von den Gasen weiß man durch die Arbeiten Kundts und Warburgs<sup>1)</sup>, daß ihr Gleitungskoeffizient bei gewöhnlichem Druck zu vernachlässigen ist, bei geringen Drucken aber gut meßbare Werte annimmt. Diese Resultate hat neuerdings Timiriazeff<sup>2)</sup> durch ausführliche, nach der Ablenkungsmethode ausgeführte Messungen bestätigt und ausgedehnt.

Bei tropfbaren Flüssigkeiten ist die Frage noch nicht so weit entschieden, obgleich alle Zeichen dafür sprechen, daß bei gewöhnlichem Druck auch die Gleitung der Flüssigkeiten zu vernachlässigen ist.

v. Helmholtz und Piotrowski<sup>3)</sup>, die sich zuerst mit der Gleitung tropfbarer Flüssigkeiten beschäftigten, schlossen aus ihren Messungen auf einen gut bemerkbaren und meßbaren Betrag derselben, und seitdem hat sich eine ganze Reihe von Forschern mit der Frage beschäftigt.

Ihr gemeinsames Resultat ist, daß  $\lambda$ , der Gleitungskoeffizient, auf alle Fälle einen kleineren Wert besitzt als der, welchen Helmholtz und Piotrowski für ihn fanden ( $\lambda$  für Gold—Wasser = 0,235 cm); aber nach einigen Forschern soll trotzdem eine zwar kleine, aber doch bemerkbare Gleitung vorhanden sein, nach anderen wieder keine.

Ausführliche Literaturangaben über die Frage findet man in der Abhandlung R. Ladenburgs<sup>4)</sup>, der die Angelegenheit ebenfalls als unentschieden betrachtet und deshalb die Versuche

1) A. Kundt u. E. Warburg, Pogg. Ann. 155. p. 337. 525. 1875.

2) A. Timiriazeff, Ann. d. Phys. 40. p. 971. 1913.

3) H. v. Helmholtz u. G. Piotrowski, Sitzungsber. d. Wiener Akad. d. Wiss. 50 (2). p. 607. 1860.

4) R. Ladenburg, Ann. d. Phys. 27. p. 157. 1907. Außer den dort aufgezählten Arbeiten vgl. noch E. R. Drew, Physical Review 12. p. 184. 1901.

von v. Helmholtz und Piotrowski wiederholt. Die Flüssigkeit wurde in eine Hohlkugel gefüllt, auf einen Draht aufgehängt und dann die Dämpfung der Torsionsschwingungen beobachtet.

Ladenburg hat seine Versuche mit Glaskugeln und Wasser ausgeführt, wobei die Kugeln einmal innen versilbert waren, im anderen Falle nicht. Die Berechnungen wurden auf die Voraussetzung gegründet, daß eine Gleitung nicht statt hat. Ladenburg vergleicht dann die Werte, die er für  $\lambda$  mit den zwei Kugeln erhielt, teils untereinander, teils mit Resultaten, die von anderen Forschern nach anderen Methoden erhalten wurden, und aus der konstatierten Übereinstimmung schließt Ladenburg, daß die Voraussetzung seiner Betrachtung, nämlich die Vernachlässigung der Gleitung, der Wirklichkeit entspricht.

Weiterhin macht Ladenburg darauf aufmerksam, daß die Helmholtz-Piotrowskischen Berechnungen des Gleitungskoeffizienten gegen gewisse experimentelle Daten sehr empfindlich sind. So z. B., wenn man für das Trägheitsmoment der schwingenden Kugel einen nur um 1 Proz. größeren Wert nimmt, als den von Piotrowski angegebenen, und das liegt innerhalb der Beobachtungsfehler von Piotrowski, so erhält man schon für den Gleitungskoeffizienten statt  $\lambda = 0,235 \text{ cm}$   $\lambda = 0,009 \text{ cm}$ .

Unter solchen Umständen erschien es wünschenswert, den Gleitungskoeffizienten durch direkte Messungen zu bestimmen.

Den Gleitungskoeffizienten definieren wir durch folgende Gleichung:

$$(34) \quad \psi_s - \psi_f = \lambda \frac{\partial \psi_f}{\partial n} \cdot 1,$$

1) Wir haben in (34)  $\lambda$  durch die Winkelgeschwindigkeiten und nicht wie allgemein üblich, durch die tangentiellen Geschwindigkeiten definiert. Es wurde das durch die Natur der von uns betrachteten Flüssigkeitsbewegung bestimmt. Indessen ist das nicht wesentlich, da man das durch die tangentiellen Geschwindigkeiten definierte  $\lambda$  aus obigem, durch (34) definierten, leicht berechnen kann. In unserem Falle ist, wie eine kleine Rechnung zeigt, der erstere im Vergleich zum letzteren im Verhältnis

$$\frac{1}{1 + \frac{R \frac{\partial \psi_f}{\partial n}}{\psi_f}} \text{ kleiner, wobei } R \text{ die Entfernung des in Betracht gezogenen Punktes der Kugeloberfläche von der Drehungsachse bezeichnet}$$

darin bedeutet  $\psi_s$  die Winkelgeschwindigkeit des starren Körpers,  $\psi_f$  die Winkelgeschwindigkeit der Flüssigkeit an der Grenze starrer Körperflüssigkeit,  $n$  die nach dem Innern des starren Körpers gerichtete Normale der Grenzfläche, und  $\lambda$  den Gleitungskoeffizienten. Will man nun  $\lambda$  experimentell bestimmen, so muß man die Grundgleichungen der Hydrodynamik mit den aus (34) sich ergebenden Grenzbedingungen integrieren. Wir betonen, daß unsere Berechnungen von nun ab sich nur auf so langsame Bewegungen beziehen, daß man die Glieder zweiten Grades der Geschwindigkeitskomponenten schon vernachlässigen kann.

Bei der von uns untersuchten Art der Bewegung (die innere Kugelfläche ruht, die äußere dreht sich mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit  $\psi$ ) ist die Verteilung der Winkelgeschwindigkeit in dem von den zwei konzentrischen Kugelflächen begrenzten Flüssigkeitsraume gegeben durch:

$$(35) \quad \psi = \frac{A}{r^3} + B,$$

wobei die Konstanten  $A$  und  $B$  aus den an den zwei Grenzflächen zu erfüllenden Grenzbedingungen zu berechnen sind.

Zieht man die Gleichung (34) in Betracht, so wird die Grenzbedingung an der inneren Kugel, wo die Richtung von  $n$  entgegengesetzt ist derjenigen von  $r$ , und die Winkelgeschwindigkeit des festen Körpers gleich Null ist,

$$(36) \quad 0 - (\psi)_{r=r_2} = -\lambda \left( \frac{\partial \psi}{\partial r} \right)_{r=r_2}$$

an der äußeren Kugel:

$$(37) \quad \psi - (\psi)_{r=R} = +\lambda \left( \frac{\partial \psi}{\partial r} \right)_{r=R}.$$

Substituiert man nun die Werte von  $\psi$  und  $\partial \psi / \partial r$  aus (35), so wird

$$(38) \quad -\frac{A}{r_2^3} - B = \lambda \cdot \frac{3A}{r_2^4},$$

$$(39) \quad \psi - \frac{A}{R^3} - B = -\lambda \cdot \frac{3A}{R^4}.$$

Aus diesen Gleichungen kann man  $A$  und  $B$  berechnen:

$$(40) \quad A = \frac{\psi}{\frac{1}{R^3} - \frac{1}{r_2^3} - 3\lambda \left( \frac{1}{R^4} + \frac{1}{r_2^4} \right)},$$

$$(41) \quad B = - \frac{\left( \frac{3\lambda}{r_2^4} + \frac{1}{r_2^3} \right) \Psi'}{\frac{1}{R^3} - \frac{1}{r_2^3} - 3\lambda \left( \frac{1}{R^4} + \frac{1}{r_2^4} \right)}.$$

Nun ist  $\psi$  im Flüssigkeitsraume vollständig bekannt. Das auf die innere Kugel ausgeübte Drehmoment der inneren Reibung ist:

$$(42) \quad \Phi = \frac{8\pi}{3} \eta r_2^4 \left( \frac{d\psi}{dr} \right)_{r=r_2}.$$

Dabei ist:

$$(43) \quad \left( \frac{d\psi}{dr} \right)_{r=r_2} = \frac{-3\Psi'}{\frac{1}{R^3} - \frac{1}{r_2^3} - 3\lambda \left( \frac{1}{R^4} + \frac{1}{r_2^4} \right)}.$$

Bezeichnet man mit  $\tau$  das Torsionsmoment des Aufhängedrahtes, mit  $\vartheta$  den Ablenkungswinkel der schwingenden inneren Kugel, so ist:

$$(44) \quad \tau \vartheta = \frac{-8\pi\eta\Psi'}{\frac{1}{R^3} - \frac{1}{r_2^3} - 3\lambda \left( \frac{1}{R^4} + \frac{1}{r_2^4} \right)}.$$

In dieser Formel kommen außer den Größen, die der Messung direkt zugänglich sind, zwei Unbekannte von  $\eta$  und  $\lambda$ ; zu ihrer Bestimmung braucht man also zwei Messungen auszuführen. Aus (44) ist ersichtlich, daß es nicht genügt, um  $\eta$  und  $\lambda$  einzeln zu bestimmen, Messungen mit verschiedener  $\Psi$  auszuführen; dazu sind Messungen mit Kugelflächen von verschiedenen Radien nötig. Zu diesem Zweck haben wir die kleinere Kugel mit dem äußeren Radius  $r_2'$  benutzt. Ihre Ablenkung betrage bei der Winkelgeschwindigkeit  $\Psi'$  der äußeren Kugel  $\vartheta'$ . Dann ist

$$(45) \quad \tau' \vartheta' = \frac{-8\pi\eta\Psi'}{\frac{1}{R^3} + \frac{1}{r_2'^3} - 3\lambda \left( \frac{1}{R^4} + \frac{1}{r_2'^4} \right)}.$$

Aus (44) und (45) kann man nun  $\eta$  und  $\lambda$  berechnen. Führen wir wieder die Bezeichnungen ein:

$$(46) \quad \tau = \frac{\pi^3 K}{T^3}, \quad \Psi = \frac{2\pi}{\Omega}, \quad \vartheta = \frac{n}{A},$$

$$(47) \quad \tau' = \frac{\pi^3 K'}{T'^3}, \quad \Psi' = \frac{2\pi}{\Omega'}, \quad \vartheta' = \frac{n'}{A'}$$

und weiterhin

$$(48) \quad C = \frac{\Omega K n}{T^2 A} = - \frac{16 \eta}{\frac{1}{R^3} - \frac{1}{r_2^3} - 3 \lambda \left( \frac{1}{R^4} + \frac{1}{r_2^4} \right)}$$

kannt.  
inneren

und

$$(49) \quad C' = \frac{\Omega' K' n'}{T'^2 A'} = - \frac{16 \eta}{\frac{1}{R'^3} - \frac{1}{r_2'^3} - 3 \lambda \left( \frac{1}{R'^4} + \frac{1}{r_2'^4} \right)}$$

Sind nun die Messungen mit der kleinen und großen Kugel bei derselben Temperatur und bei demselben Druck ausgeführt, so sind die rechtsstehenden  $\eta$  einander gleich, und durch Division von (48) durch (49) erhalten wir:

s Auf-  
genden

$$(50) \quad \frac{C}{C'} = \frac{\frac{1}{R^3} - \frac{1}{r_2'^3} - 3 \lambda \left( \frac{1}{R^4} + \frac{1}{r_2'^4} \right)}{\frac{1}{R'^3} - \frac{1}{r_2^3} - 3 \lambda \left( \frac{1}{R'^4} + \frac{1}{r_2^4} \right)}$$

und daraus den Gleitungskoeffizient

die der  
und  $\lambda$ ;

$$(51) \quad \lambda = \frac{C' \left( \frac{1}{R'^3} - \frac{1}{r_2'^3} \right) - C \left( \frac{1}{R^3} - \frac{1}{r_2^3} \right)}{3 \left\{ C' \left( \frac{1}{R'^4} + \frac{1}{r_2'^4} \right) - C \left( \frac{1}{R^4} + \frac{1}{r_2^4} \right) \right\}}$$

en aus-  
gt, um  
lener  $\psi$   
on ver-  
wir die  
re Ab-  
äuße-

Auf Grund unserer Voraussetzung können wir zur Berechnung von  $\lambda$  nur solche Messungen heranziehen, bei denen die Geschwindigkeiten langsam genug waren; d. h., daß die Ablenkungswinkel proportional sind der Winkelgeschwindigkeit der äußeren Kugel, also die  $c$  bzw.  $c'$  konstant sind. Außerdem muß man die Größen  $C$  und  $C'$  auf dieselbe Temperatur reduzieren, was man, da  $C$  dem  $n$ ,  $n$  aber caeteris paribus dem  $\eta$  proportional ist, dadurch bewerkstelligen kann, daß man die  $C$  proportional  $\eta$  reduziert auf 18° C.

Bei der großen Kugel ergibt sich aus den Versuchen 201, 202, 205 und 206 bei  $\Omega (= )^1$  9200 sec.

rechnen.

$$\left. \begin{array}{l} C = 80,442 \\ 77,250 \\ 78,492 \\ 78,877 \end{array} \right\} \text{im Mittel } C_{9200} = 78,765.$$

1) (=) soll „ungefähr gleich“ bedeuten.

Aus den Versuchen 203, 204, 207 und 212 bei  $\Omega (=)$  3450 sec.

$$\left. \begin{array}{l} C = 79,593 \\ 79,142 \\ 78,374 \\ 83,809 \end{array} \right\} \text{im Mittel } C_{3450} = 80,229.$$

$C_{3450}$  ist also schon um ungefähr 2 Proz. größer als  $C_{9200}$  so daß wir es zur Berechnung von  $\lambda$  nicht benutzten.

Bei der kleineren Kugel ist:

$$\left. \begin{array}{l} \text{aus 263 und 264 bei } C' = 20,950 \\ \Omega(=) 4100 \text{ sec: } 20,814 \end{array} \right\} \text{im Mittel: } C'_{4100} = 20,88,$$

aus den Versuchen 259, 260, 261 und 262 bei  $\Omega (=)$  2200 sec:

$$\left. \begin{array}{l} C' = 20,72 \\ 20,96 \\ 20,36 \\ 20,78 \end{array} \right\} C'_{2200} = 20,71,$$

aus 269 bis 272 bei  $\Omega (=)$  650 sec:

$$\left. \begin{array}{l} C' = 21,29 \\ 21,71 \\ 21,78 \\ 21,61 \end{array} \right\} C'_{650} = 21,60.$$

Wenn man nun  $C_{9200}$  kombiniert

$$\begin{array}{llll} \text{mit } C'_{4100}, & \text{so erhält man } \lambda = -0,012 \text{ cm,} \\ \text{" } C'_{2200}, & \text{" " " } \lambda = -0,016 \text{ " } \\ \text{" } C'_{650}, & \text{" " " } \lambda = +0,003 \text{ " } \end{array}$$

$\lambda$  kann nun per definitionem nicht negativ werden. Das negative Vorzeichen des Resultates ist den Versuchsfehlern zuzuschreiben und so zu verstehen, daß der Wert von  $\lambda$  zu klein ist, als daß er auf unsere Versuche einen merklichen Einfluß ausüben könnte, und so kann man behaupten, daß  $\lambda$  kleiner ist als unser *maximaler Versuchsfehler*, also

$$\lambda < 0,008 \text{ cm}$$

an der Grenze von Wasser und Kupfer.

Eine Gleitung von derjenigen Größenordnung, wie sie von Helmholtz und Piotrowski gefunden wurde, haben

wir also nicht beobachtet. Es ist dies verständlich, wenn man bedenkt, daß die Methode Piotrowskis, die Beobachtung der Dämpfung, eine kleinere Genauigkeit besitzt als unsere; ein experimenteller Nachweis dessen, daß  $\lambda$  sehr klein, eventuell Null ist, kann nur durch äußerst genaue Versuche geschehen.

### § 17. Zusammenfassung.

I. Wir haben mit dem Zemplénschen Apparat zur Untersuchung der inneren Reibung von Gasen die innere Reibung von Wasser untersucht mit der Ablenkungsmethode, bei Bewegungen, bei denen die Umdrehungsdauer der äußeren Kugel zwischen

$$\Omega = 0,17 \text{ sec und } \Omega = 9300 \text{ sec}$$

variierte.

II. Den Koeffizienten der inneren Reibung des Wassers haben wir bei  $18^{\circ} \text{ C}$  zu

$$\eta_{18} = 0,010562$$

gefunden.

III. Wir haben durch graphische Bearbeitung unserer Versuchsdaten den Nachweis erbracht, daß die von Zemplén bezüglich des Drehmomentes der inneren Reibung abgeleitete und schon bei Gasen geprüfte Gesetzmäßigkeit auch bei Wasser besteht.

IV. Im untersuchten Geschwindigkeitsgebiete trat keine Turbulenz auf; sollte jedoch das Reynoldssche Kriterium auch auf den Flüssigkeitsraum zwischen den zwei Kugelflächen anwendbar sein, so müßte die Turbulenz schon eingetreten sein.

V. Aus den Versuchsdaten ergibt sich, daß das sogen. Rayleigh-Lambsche Kriterium, das die Gültigkeitsgrenze der Formeln für die langsamen Bewegungen angibt, bei Wasser wenigstens der Größenordnung nach stimmt, während es bei den Gasen einen im Vergleich zum wirklichen 50- bzw. 100mal kleineren Wert ergab.

VI. Durch Auswertung der mit Kugeln mit verschiedenen Radien ausgeführten Versuche schlossen wir, daß bei den

ganz langsamen Bewegungen der Koeffizient der Gleitung

$$\lambda < 0,008 \text{ cm,}$$

also praktisch zu vernachlässigen ist.

Die Versuche wurden im Physikalischen Institut I der Budapester Universität ausgeführt. Es ist uns eine angenehme Pflicht, für das Überlassen der Apparate und Institutsräumlichkeiten dem Direktor des Instituts, seiner Exzellenz Baron Roland von Eötvös, unseren aufrichtigen Dank auszusprechen.

(Eingegangen 23. Dezember 1915.)



### 3. Zur Kritik der Elektronentheorie der Metalle; von C. W. Oseen.

Im Jahre 1899 veröffentlichte Hr. Voigt<sup>1)</sup> eine Untersuchung betreffend die Frage, ob es möglich sei, von der heutigen (oder damaligen) Auffassung vom Wesen der Lichtemission und -absorption ausgehend, zum Kirchhoffschen Satze zu gelangen. Ich habe keine Veranlassung, näher auf diese Arbeit einzugehen. Ich will nur daran erinnern, daß Hr. Voigt es als selbstverständlich betrachtete, daß bei völlig unregelmäßigen Schwingungen der lichtemittierenden Partikeln keine Ausstrahlung stattfinden kann<sup>2)</sup>, indem die von den verschiedenen Partikeln emittierten Wellen sich durch Interferenz aufheben müssen.

Im Jahre 1903 griff Hr. Lorentz<sup>3)</sup> ein verwandtes Problem auf, indem er die Emission und Absorption einer unendlich dünnen Metallplatte für die ultraroten Wellen untersuchte. Er nahm dabei nur die freien Elektronen, die nach der heutigen (oder damaligen) Theorie die Leitung im Metalle besorgen, in Betracht. Er nahm an, daß diese Elektronen sich im allgemeinen geradlinig und mit konstanter Geschwindigkeit bewegen, daß sie aber bei den Zusammenstößen mit den Metallmolekeln starke Beschleunigungen erfahren und dabei Energie ausstrahlen. Eine statistische Berechnung der ultraroten Energie, welche die Metallplatte unter diesen Umständen emittiert, ergab für die Funktion:

$$F(\lambda, T) = \frac{8\pi}{c} \frac{E}{A}$$

1) W. Voigt, Über die Proportionalität von Emissions- und Absorptionsvermögen. Wied. Ann. 67. p. 366. 1899.

2) „Ungeordnete Bewegungen im Sinne der kinetischen Gastheorie sind natürlich bei fortgepflanzten Lichtschwingungen niemals vorhanden.“

3) H. A. Lorentz, On the emission and absorption by heat of greater wave-lengths. Proc. of Kon. Ak. v. Wet. te Amsterdam, Vol. V. 1903.

den Wert:

$$\frac{16 \pi a T}{3 \lambda^4},$$

wo  $a = \frac{3}{2} k$ . Denselben Wert ergibt die Rayleigh-Jeanssche Theorie für alle Wellenlängen. Sie stimmt für große Wellenlängen mit der Planckschen Formel überein.

Hr. Langevin<sup>1)</sup> hat einen Punkt in den Ausführungen von Hr. Lorentz vereinfacht. Die so vereinfachte Theorie hat Hr. Lorentz in seinem Buch: *The Theory of Electrons*, Teubner 1909, nochmals dargestellt.

Diese Lorentzsche Theorie, die später Jeans<sup>2)</sup>, H. A. Wilson<sup>3)</sup>, Bohr<sup>4)</sup> und Mc Laren<sup>5)</sup> weiter verallgemeinert haben, hat eine beträchtliche Bedeutung für die Entwicklung der Elektronentheorie gehabt. Einmal hat man sie als eine der schönsten Bestätigungen der Vorstellungen angesehen, die der Drude-Lorentzschen Theorie der elektrischen Leitfähigkeit der Metalle zugrunde liegen. Andererseits hat sie wesentlich zu der jetzt üblichen Auffassung beigetragen, daß man, wenn man auf die klassische Mechanik und Elektrodynamik die statistischen Methoden anwendet, mit Notwendigkeit zum Rayleigh-Jeansschen Strahlungsgesetz geführt wird.

Ich behaupte, daß in dieser Lorentzschen Theorie ein Fehler steckt.

Hr. Lorentz zeigt zunächst, daß die während einer Zeiteinheit durch ein Flächenelement  $\omega'$  strömende Energie sich folgendermaßen ausdrücken läßt:

$$c \overline{d_x^2} \omega' = \frac{1}{2} c \omega' \sum_{s=1}^{s=\infty} a_s^2,$$

1) Abraham et Langevin, *Ions, Electrons, Corpuscles*, Tome I, p. 507. Paris 1905.

2) J. H. Jeans, *The Motion of Electrons in Solids*, Part I, *Phil. Mag.* 1909.

3) H. A. Wilson, *On the Electron Theory of the Optical Properties of Metals*, *Phil. Mag.* 1910.

4) N. Bohr, *Studier over metallernes elektrontheori*. København 1911.

5) S. B. Mc Laren, *The Emission and Absorption of Energy by Electrons*, *Phil. Mag.* 1911.

wo:

$$a_s = \frac{se}{2\vartheta^2 c^2 r} \sum_0^{\vartheta} \int \cos \frac{s\pi t}{\vartheta} v_x dt. {}^1)$$

Die Summe soll über alle Elektronen im Metalle erstreckt werden.  $v_x$  ist die  $x$ -Komponente der Geschwindigkeit eines Elektrons im Momente  $t$ . Jedem ganzzahligen Werte  $s$  entspricht eine Wellenlänge:

$$\lambda = \frac{2c\vartheta}{s}.$$

In der Reihe:

$$\sum_{s=1}^{s=\infty} a_s^2$$

gibt es eine Zahl:

$$\frac{2c\vartheta}{\lambda^2} d\lambda$$

von Gliedern, deren zugehörige Wellenlängen in einem Bereich  $\lambda$  bis  $\lambda + d\lambda$  liegen. Nach Hrn. Lorentz<sup>2)</sup> sollen diese Glieder mit genügender Annäherung denselben Wert haben. Für die im Spektralbereich  $\lambda$  bis  $\lambda + d\lambda$  durch das Flächenelement  $d\omega'$  pro Sekunde strömende Energie erhält man alsdann den Ausdruck:

$$\frac{c^2 \vartheta \omega'}{\lambda^2} a_s^2 d\lambda.$$

Ich zeige zunächst, daß der einzige Wert von  $\vartheta a_s^2$ , der mit dieser Annahme verträglich ist, der Wert  $\vartheta a_s^2 = 0$  ist.

Wir bezeichnen mit  $M$  eine ganze Zahl, die wir so groß nehmen, daß die Funktion:

$$\cos \frac{s\pi t}{\vartheta}$$

im Intervalle  $t$  bis  $t + \varepsilon$ , wo

$$\varepsilon = \frac{\vartheta}{sM} = \frac{\lambda}{2cM}$$

als konstant betrachtet werden kann. Wir setzen für  $m < M$ :

$$(m + \frac{1}{2})\varepsilon = t_m$$

1) Diese Formel ist mit der Formel (15) in Hrn. Lorentz' Abhandlung vom Jahre 1903 identisch, wenn man die Bezeichnungen dort zur Übereinstimmung mit den in Theory of Electrons benutzten abändert.

2) Theory of Electrons, S. 85.

und für jede ganze Zahl  $n$ , die den Ungleichungen

$$n \geq 0, \quad n \leq \frac{\vartheta}{\varepsilon} - 1$$

genügt:

$$\int_{n\varepsilon}^{(n+1)\varepsilon} \sum v_x dt = \xi_n.$$

Wir erhalten dann:

$$\begin{aligned} a_s &= \frac{s e}{2 \vartheta^2 c^2 r} \sum^{(m)} \cos \frac{s \pi t_m}{\vartheta} \\ &\quad \left\{ \xi_m + \xi_{2M-m} + \xi_{2M+m} + \xi_{4M-m} + \xi_{4M+m} + \dots \right\} \\ &= \frac{s e}{2 \vartheta^2 c^2 r} \sum_{0 \leq m < M}^{(m)} \cos \frac{s \pi t_m}{\vartheta} \sum_{0 \leq 2nM \pm m \leq \frac{\vartheta}{\varepsilon} - 1}^{(n)} \xi_{2nM \pm m}. \end{aligned}$$

Wir wollen der ganzen Zahl  $M$  jetzt noch eine Bedingung auferlegen. Wir wollen annehmen, daß  $\varepsilon$  so groß ist, daß man die Größen  $\xi_n$  als voneinander unabhängig betrachten kann. Hierfür ist notwendig und hinreichend, daß während der Zeit  $\varepsilon$  eine sehr große Zahl von Stößen stattfinden soll. Unsere zwei Annahmen betreffend  $M$  sind offenbar miteinander verträglich, wenn die Wellenlänge  $\lambda$  im Verhältnis zur freien Weglänge der Elektronen groß ist.

Betrachten wir jetzt unseren Ausdruck für  $\vartheta a_s / \lambda$ :

$$\frac{\vartheta a_s}{\lambda} = \frac{e}{\lambda^2 c r} \sum_{0 \leq m < M}^{(m)} \cos \frac{2 \pi c t_m}{\lambda} \sum_{0 \leq 2nM \pm m \leq \frac{\vartheta}{\varepsilon} - 1}^{(n)} \xi_{2nM \pm m}.$$

Das Quadrat dieser Größe ist mit der Energiemenge im Intervalle  $\lambda$  bis  $\lambda + d\lambda$  proportional, die von 0 bis  $\vartheta$  durch ein Flächenelement strömt. Dieses Quadrat muß also eine niemals abnehmende, im Durchschnitt proportional mit  $\vartheta$  wachsende Funktion von  $\vartheta$  sein. Wir nehmen an, daß  $\vartheta a_s$  für  $\vartheta = \vartheta_0$  einen positiven Wert hat. Dann folgt, daß  $\vartheta a_s$  für  $\vartheta > \vartheta_0$  eine niemals abnehmende und im Mittel wie  $\sqrt{\vartheta}$  wachsende, positive Funktion von  $\vartheta$  sein muß. Wenn wir aber jetzt das rechte Glied in unserer Formel für  $\vartheta a_s / \lambda$  betrachten, so sehen wir sofort, daß wir, während  $\vartheta$  wächst,  $\lambda$ ,  $M$ ,  $\varepsilon$  und somit auch  $t_m$  konstant halten können. Die einzige

Abänderung, die unser rechtes Glied erfährt, besteht darin, daß in die Reihen:

$$\sum^{(n)} \xi_{2nM \pm m}$$

$$0 \leq 2nM \pm m \leq \frac{\vartheta}{\epsilon} - 1$$

neue Glieder hinzukommen. Für diese Glieder ist aber ein negatives Vorzeichen ebenso wahrscheinlich wie ein positives. Es ist unmöglich, daß  $\vartheta a_s$  dabei niemals einen kleineren Wert bekommen würde. Wir sehen also, daß unsere Annahme, daß  $\vartheta a_s$  für  $\vartheta = \vartheta_0$  einen positiven Wert hat, uns zu einem Widerspruch geführt hat. Es folgt, daß  $(\vartheta a_s)_{\vartheta=\vartheta_0}$  nicht positiv sein kann. Man zeigt in derselben Weise, daß  $\vartheta a_s$  nicht negativ sein kann. Es folgt  $\vartheta a_s = 0$  und somit  $\vartheta a_s^2 = 0$ .

Wir sehen also, daß die Lorentzsche Annahme, daß die Glieder in der Reihe  $\Sigma a_s^2$ , deren Wellenlängen demselben Bereich  $\lambda$  bis  $\lambda + d\lambda$  zugehören, denselben Wert haben, mit dem Resultat der Lorentzschen Theorie unverträglich ist. Wir wollen deshalb diese Annahme aufgeben und setzen die Energie im Intervalle  $\lambda$  bis  $\lambda + d\lambda$ , die pro Sekunde durch ein Flächenelement  $\omega'$  strömt, gleich

$$\frac{c^2 \vartheta \omega'}{\lambda^2} \overline{a_s^2} d\lambda,$$

wo wir unter  $\overline{a_s^2}$  den Mittelwert der

$$\frac{2c\vartheta}{\lambda^2} d\lambda$$

Glieder  $a_s^2$  in diesem Intervall verstehen.

Zur Begründung seiner Annahme führt Hr. Lorentz<sup>1)</sup> an, daß seine Berechnung der Größen  $a_s^2$  gezeigt habe, daß diese Größen bei genügend großem  $\vartheta$  regelmäßig und langsam variierende Funktionen von  $\vartheta$  und  $\lambda$  sind. Da wir gesehen haben, daß die betreffende Annahme unmöglich zutreffen kann, so müssen wir schließen, daß in der Berechnung von  $a_s^2$  ein Fehler stecken muß. Unsere Aufgabe ist jetzt, diesen Fehler aufzudecken.

1) Theory of Electrons, Note 34, p. 281.

Wir haben:

$$\begin{aligned}
 a_s^2 &= \left( \frac{s e}{2 \vartheta^2 c^2 r} \right)^2 \left\{ \sum_{0 \leq m < M}^{(m)} \cos^2 \frac{s \pi t_m}{\vartheta} \left( \sum_{0 \leq 2nM \pm m \leq \frac{\vartheta}{\varepsilon} - 1}^{(n)} \xi_{2nM \pm m}^{\varepsilon} \right)^2 \right. \\
 &\quad + 2 \sum_{0 \leq m' < M} \cos \frac{s \pi t_m}{\vartheta} \cos \frac{s \pi t_{m'}}{\vartheta} \sum^{(n)} \xi_{2nM \pm m}^{\varepsilon} \sum^{(n')} \xi_{2n'M \pm m'}^{\varepsilon} \Big\} \\
 &= \left( \frac{s e}{2 \vartheta^2 c^2 r} \right)^2 \left\{ \sum_{0 \leq m < M}^{(m)} \cos^2 \frac{s \pi t_m}{\vartheta} \sum_{0 \leq 2nM \pm m \leq \frac{\vartheta}{\varepsilon} - 1}^{(n)} \xi_{2nM \pm m}^2 + \right. \\
 &\quad + 2 \sum_{0 \leq m < M}^{(m)} \cos^2 \frac{s \pi t_m}{\vartheta} \sum_{\substack{0 \leq 2nM \pm m \leq \frac{\vartheta}{\varepsilon} - 1 \\ n < n'}}^{(n, n')} \xi_{2nM \pm m}^{\varepsilon} \xi_{2n'M \pm m}^{\varepsilon} + \\
 &\quad \left. + 2 \sum_{0 \leq m' < M} \cos \frac{s \pi t_m}{\vartheta} \cos \frac{s \pi t_{m'}}{\vartheta} \sum_{0 \leq 2n'M \pm m' \leq \frac{\vartheta}{\varepsilon} - 1}^{(n, n')} \xi_{2nM \pm m}^{\varepsilon} \xi_{2n'M \pm m'}^{\varepsilon} \right\}.
 \end{aligned}$$

Hr. Lorentz bemerkt nun, daß für unsere Größen  $\xi$  das positive und negative Vorzeichen gleich wahrscheinlich sind. Dasselbe muß dann für die Produkte aus zwei verschiedenen  $\xi$  gelten. In den Summen:

$$(a) \quad \sum_{n < n'}^{(n, n')} \xi_{2nM \pm m}^{\varepsilon} \xi_{2n'M \pm m}^{\varepsilon}$$

und:

$$(b) \quad \sum^{(n, n')} \xi_{2nM \pm m}^{\varepsilon} \xi_{2n'M \pm m'}^{\varepsilon}$$

heben sich deshalb die Glieder bei genügend großem  $\vartheta$  auf, und man bekommt:

$$a_s^2 = \left( \frac{s e}{2 \vartheta^2 c^2 r} \right)^2 \sum_{0 \leq m < M}^{(m)} \cos^2 \frac{s \pi t_m}{\vartheta} \sum_{0 \leq 2nM \pm m < \frac{\vartheta}{\varepsilon} - 1} \xi_{2nM \pm m}^{(2)}.$$

Der Fehler, den Hr. Lorentz begangen hat, besteht darin, daß er annimmt, daß die Summe (a) verschwindet.

Betrachten wir in der Tat ein System von  $p$  Größen  $a_1, a_2 \dots a_p$ . Unter ihnen seien  $m$  positiv,  $p - m$  negativ. Unter den Größen:

$$a_i a_j \quad 1 \leq i < j \leq p$$

gibt es dann, wie leicht ersichtlich ist,

$$\frac{1}{2} [m(m-1) + (p-m)(p-m-1)]$$

positiv und:

$$m(p-m)$$

negative Größen. Der Unterschied zwischen der Zahl der negativen und der positiven Größen  $a_i a_j$  ist also:

$$\frac{1}{2} [p - (p-2m)^2].$$

Wenn  $p$  eine gerade Zahl ist und wenn  $m = p/2$ , so ist also die Zahl der negativen Größen  $a_i a_j$  um  $\frac{1}{2}p$  größer als die Zahl der positiven. Je genauer die Zahl der positiven Größen  $a_i$  der Zahl der negativen gleich ist, um so mehr überwiegt unter den Größen  $a_i a_j$  ( $i < j$ ) die Zahl der negativen. Die Aussage von Hrn. Lorentz, daß die Summe ( $a$ ) deshalb verschwinden muß, weil unter den Größen  $\xi$  ebenso viele positiv wie negativ sind, ist also unrichtig.

Die Frage erhebt sich jetzt, ob das Hauptresultat der Lorentzschen Theorie, die Formel:

$$P(\lambda, T) = \frac{16 \pi a T}{3 \lambda^4}$$

richtig ist. Wir werden zeigen, daß diese Formel in einem gewissen Sinne richtig ist, obwohl ihre physikalische Bedeutung eine andere als in der Lorentzschen Theorie ist.

Wir beweisen zunächst einen mathematischen Hilfssatz. Wenn wir  $\bar{N}$  Systeme von je  $p$  Größen  $a_i^{(n)}$  ( $1 \leq i \leq p$ ,  $1 \leq n \leq \bar{N}$ ) haben, die alle voneinander unabhängig sind; wenn für jede dieser Größen das negative Vorzeichen ebenso wahrscheinlich wie das positive ist; wenn endlich  $\bar{N}$  im Verhältnis zu  $2^p$  sehr groß ist, dann gibt es unter den Größen  $a_i^{(n)} a_j^{(n)}$  ( $1 \leq i < j \leq p$ ) im Mittel ( $1 \leq n \leq \bar{N}$ ) ebenso viele positive wie negative Größen.

**Beweis.** Man kann die Vorzeichen  $+$  und  $-$  in  $2^p$  verschiedenen Weisen zwischen den Größen  $a_i^{(n)}$  ( $i = 1, 2 \dots p$ ) verteilen. Da  $N$  im Verhältnis zu  $2^p$  sehr groß ist, so kommt unter den  $N$  Systemen jede Vorzeichenkombination vielmals vor. Die Wahrscheinlichkeit einer Kombination mit  $m$  Vorzeichen  $+$  und  $p-m$  Vorzeichen  $-$  ist dann:

$$\frac{1}{2^p} \cdot \frac{p!}{m!(p-m)!}$$

In dem zugehörigen Systeme  $a_i a_j$  gibt es:

$$\frac{1}{2} [m^2 + (p-m)^2 - p]$$

positive und:

$$m(p-m)$$

negative Größen. Die Wahrscheinlichkeit dafür, daß eine Größe  $a_i a_j$  positiv ist, ist also:

$$\frac{2}{p(p-1)} \cdot \frac{1}{2^{p+1}} \cdot \sum_0^p \binom{p}{m} \frac{p!}{m!(p-m)!} [m^2 + (p-m)^2 - p]$$

und die Wahrscheinlichkeit, daß sie negativ ist:

$$\frac{2}{p(p-1)} \cdot \frac{p}{2^p} \cdot \sum_1^p \binom{p}{m} \frac{(p-1)!}{(m-1)!(p-m-1)!}$$

Wir haben:

$$\sum_0^p \binom{p}{m} \frac{p!}{m!(p-m)!} x^m = (1+x)^p = f(x)$$

und folglich:

$$\sum_0^p \binom{p}{m} \frac{p!}{m!(p-m)!} = f(1) = 2^p,$$

$$\sum_0^p \binom{p}{m} \frac{m p!}{m!(p-m)!} = f'(1) = p 2^{p-1},$$

$$\sum_0^p \binom{p}{m} \frac{m^2 p!}{m!(p-m)!} = [x f''(x) + f'(x)]_{x=1} = p(p+1) 2^{p-2}.$$

Für die beiden Wahrscheinlichkeiten erhalten wir hieraus den gemeinsamen Wert  $\frac{1}{2}$ .

Wir fragen jetzt: Kann man mittels dieses Satzes den Mittelwert  $\overline{a_s^2}$  berechnen? Man sieht leicht, daß dies in direkter Weise nicht möglich ist. In der Tat, eine Reihe:

$$\sum \binom{n}{m} \xi^{2nM \pm m}$$

$$0 \leq 2nM \pm m \leq \frac{\phi}{\varepsilon} - 1$$



enthält

$$\frac{\vartheta}{e M} = \frac{2 e \vartheta}{\lambda}$$

Glieder. Wir haben also in diesem Fall:

$$p = \frac{2 e \vartheta}{\lambda}.$$

Die Anzahl der Größen  $a_s^2$ , deren mittleren Wert wir mit  $\overline{a_s^2}$  bezeichnet haben, war:

$$\frac{2 e \vartheta}{\lambda^2} d \lambda.$$

Das wird hier der Wert von  $\bar{N}$ .  $\bar{N}$  ist also im Verhältnis zu  $p$  klein. Der Satz kann zur direkten Berechnung von  $\overline{a_s^2}$  nicht benutzt werden. Wir verfahren deshalb folgendermaßen. Wir entwickeln  $d_x$  im Intervalle 0 bis  $\vartheta$  in eine Reihe:

$$d_x = \sum_{s=1}^{s=\infty} a_s^{(0)} \sin \frac{s \pi t}{\vartheta},$$

dann im Intervalle  $\vartheta$  bis  $2 \vartheta$  in eine Reihe:

$$d_x = \sum_{s=1}^{s=\infty} a_s^{(1)} \sin \frac{s \pi t}{\vartheta}$$

und allgemein im Intervalle  $\bar{n} \vartheta$  bis  $(\bar{n} + 1) \vartheta$  in eine Reihe:

$$d_x = \sum_{s=1}^{s=\infty} a_s^{(\bar{n})} \sin \frac{s \pi t}{\vartheta}.$$

Die dem Bereich  $\lambda$  bis  $\lambda + d \lambda$  zugehörige Energie, die im Intervalle  $\bar{n} \vartheta$  bis  $(\bar{n} + 1) \vartheta$  durch ein Flächenelement  $\omega'$  strömt, ist dann:

$$\frac{c^2 \vartheta \omega'}{\lambda^3} \overline{a_s^{(\bar{n})^2}} d \lambda.$$

Für  $a_s^{(\bar{n})}$  erhalten wir leicht den Ausdruck:

$$\begin{aligned} a_s^{(\bar{n})} &= (-1)^{\bar{n}} \frac{s e}{2 \vartheta^2 c^2 r} \sum_0^{\vartheta} \int \cos \frac{s \pi t}{\vartheta} v_x(\bar{n} \vartheta + t) dt \\ &= (-1)^{\bar{n}} \frac{s e}{2 \vartheta^2 c^2 r} \sum_{0 \leq m < M}^{(m)} \cos \frac{s \pi t_m}{\vartheta} \sum_{0 \leq 2nM \pm m \leq \frac{\vartheta}{2} - 1}^{(n)} \xi_{2nM \pm m}^{(\bar{n})}, \end{aligned}$$

WO:

$$\xi_n^{(\bar{n})} = \int_{\bar{n}\vartheta + n\pi}^{\bar{n}\vartheta + (n+1)\pi} v_x(t) dt.$$

Wir berechnen jetzt:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\bar{N}} \sum_{\bar{n}=0}^{\bar{N}-1} a_s^{(\bar{n})2} \\ &= \frac{1}{\bar{N}} \left( \frac{se}{2\vartheta^2 c^2 r} \right)^2 \left\{ \sum_{0 \leq m < M}^{(m)} \cos^2 \frac{s\pi t_m}{\vartheta} \sum_{\substack{\bar{n}=0 \\ 0 \leq 2nM \pm m \leq \frac{\vartheta}{s} - 1}}^{\bar{N}-1} \sum_{(n)} \xi_{2nM \pm m}^{(\bar{n})2} + \right. \\ &+ 2 \sum_{0 \leq m < M}^{(m)} \cos^2 \frac{s\pi t_m}{\vartheta} \sum_{\substack{\bar{n}=0 \\ 0 \leq \frac{2nM \pm m}{2n'M \pm m} \leq \frac{\vartheta}{s} - 1 \\ n < n'}}^{\bar{N}-1} \sum_{(n, n')} \xi_{2nM \pm m}^{(\bar{n})} \xi_{2n'M \pm m}^{(\bar{n})} + \\ &+ 2 \sum_{0 \leq m' < M}^{(m')} \cos \frac{s\pi t_m}{\vartheta} \cos \frac{s\pi t_{m'}}{\vartheta} \sum_{\substack{\bar{n}=0 \\ 0 \leq \frac{2nM \pm m}{2n'M \pm m'} \leq \frac{\vartheta}{s} - 1}}^{\bar{N}-1} \sum_{(n, n')} \xi_{2nM \pm m}^{(\bar{n})} \xi_{2n'M \pm m'}^{(\bar{n})} \Big\}. \end{aligned}$$

Wir wollen die ganze Zahl  $\bar{N}$  so groß wählen, daß in den  $\bar{N}$  Systemen

$$\xi_{2n \pm Mm}^{(\bar{n})} \left( \bar{n} = 0, 1, 2 \dots \bar{N} - 1; 0 \leq 2nM \pm m \leq \frac{\vartheta}{s} - 1 \right)$$

jede Kombination von  $\xi$ -Werten viele Male vorkommt. Dazu gehört ersichtlich unter anderem, daß jede Vorzeichenkombination viele Male vorkommen soll. Unter diesen Umständen ist der Mittelwert eines Produktes:

$$\xi_{2nM \pm m}^{(\bar{n})} \xi_{2n'M \pm m'}^{(\bar{n})}$$

gleich Null, und wir erhalten:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\bar{N}} \sum_{\bar{n}=0}^{\bar{N}-1} a_s^{(\bar{n})2} \\ &= \frac{1}{\bar{N}} \left( \frac{se}{2\vartheta^2 c^2 r} \right)^2 \sum_{0 \leq m < M}^{(m)} \cos^2 \frac{s\pi t_m}{\vartheta} \sum_{\substack{\bar{n}=0 \\ 0 \leq 2nM \pm m \leq \frac{\vartheta}{s} - 1}}^{\bar{N}-1} \sum_{(n)} \xi_{2nM \pm m}^{(\bar{n})2} \\ &= \frac{\vartheta}{2s} \left( \frac{se}{2\vartheta^2 c^2 r} \right)^2 \xi^2, \end{aligned}$$

wenn wir unter  $\xi^2$  den Mittelwert aller  $\xi^2$  verstehen.

Wie man den Wert von  $\bar{\xi}^2$  berechnen kann, hat Hr. Lorentz gezeigt.<sup>1)</sup> Man findet, wenn man  $\varepsilon = l/u$  setzt, wo  $l$  die freie Weglänge und  $u$  die Geschwindigkeit der Elektronen ist:

$$\bar{\xi}^2 = \frac{q^2}{3}.$$

$q = N \omega \Delta$  ist hier die Anzahl der Elektronen in einer Metallplatte, deren Volumen  $\omega \Delta$  ist. Wir bekommen so:

$$\frac{1}{N} \sum_{\bar{n}=0}^{\bar{N}-1} a_s(\bar{n})^2 = \frac{s^2 e^2 N l u \Delta}{24 c^4 \vartheta^3 r^2} \omega.$$

Wir ersehen aus dieser Formel, daß der links stehende Mittelwert von  $a_s^{(2)}$  eine regelmäßig und langsam variierende Funktion von  $\vartheta$  und  $\lambda$  ist. Er hat also für diejenigen  $a_s^2$ , die demselben Bereich  $\lambda$  bis  $\lambda + d\lambda$  zugehören, denselben Wert.

Für die Energie, die während der Zeit 0 bis  $\bar{N}$  im Intervalle  $\lambda$  bis  $\lambda + d\lambda$  durch ein Flächenelement  $\omega'$  strömt, erhalten wir nunmehr den Ausdruck:

$$\frac{c^2 \vartheta \omega'}{\lambda^2} d\lambda \cdot \frac{s^2 e^2 N l u \Delta}{24 c^4 \vartheta^3 r^2} \omega.$$

Diese Größe läßt sich aber auch in anderer Weise schreiben.

Wir entwickeln  $d_x$  im Intervalle 0 bis  $\bar{N} \vartheta = \Theta$  in eine Reihe:

$$d_x = \sum_{\Theta}^{\infty} a_s(\Theta) \sin \frac{s \pi t}{\Theta}.$$

Wir erhalten dann für die oben erwähnte Energiemenge:

$$\frac{c^2 \bar{N} \vartheta \omega'}{\lambda^2} d\lambda \cdot \overline{a_s^2(\Theta)}.$$

Wir bekommen also:

$$\overline{a_s^2(\Theta)} = \frac{s^2 e^2 N l u \Delta \omega}{24 c^4 \bar{N} \vartheta^3 r^2} = \frac{e^2 N l u \Delta \omega}{6 c^2 \lambda^2 r^2 \Theta}.$$

Wir haben damit den Beweis geführt, daß, während die Größen  $a_s^2(\Theta)$  auch bei großem  $\Theta$  ganz unregelmäßige Funktionen von  $\lambda$  und  $\Theta$  sind, die Mittelwerte

$$\overline{a_s^2}$$

1) Proc. K. Ak. Wet. Amsterdam, Vol. V, Part II, p. 676.  
Annalen der Physik. IV. Folge. 49.

dagegen bei großem  $\Theta$  regelmäßig variierende Funktionen von  $\lambda$  und  $\Theta$  sind.<sup>1)</sup> Ohne Schwierigkeit gelangt man nunmehr zur Lorentzschen Formel:

$$F(\lambda, T) = \frac{16 \pi a T}{3 \lambda^4}.$$

Wir haben ein Ergebnis erhalten, das formal mit dem entsprechenden Ergebnis in der Lorentzschen Theorie zusammenfällt. Hat aber dieses Ergebnis wirklich die Bedeutung, die man ihm allgemein zugeschrieben hat?

Wir stellen uns die Frage: Wie lang ist die Zeit, die man bei der Berechnung des Mittelwertes der emittierten Energie in Betracht nehmen muß, damit man das Anrecht habe, den oben gefundenen Wert zu erwarten? Um diese Frage zu beantworten, müssen wir zuerst untersuchen, wie klein wir  $\vartheta$  nehmen dürfen. Wir bemerken hierzu, daß dem Intervalle  $\lambda$  bis  $\lambda + d\lambda$  eine große oder wenigstens nicht sehr kleine Anzahl von ganzzahligen  $s$ -Werten zugehören muß. Wir nennen diese Anzahl  $s'$  und haben dann:

$$\frac{s'}{2c\vartheta} = \frac{d\lambda}{\lambda^2}$$

oder:

$$\frac{2c\vartheta}{\lambda} = s' \cdot \frac{\lambda}{d\lambda}.$$

Da nun  $s'$  eine große oder wenigstens nicht sehr kleine ganze Zahl ist, und da  $\lambda/d\lambda$  eine große Zahl ist, so scheint es nicht möglich,  $2c\vartheta/\lambda$  kleiner als etwa 100 zu wählen. Wir setzen also:

$$\vartheta = \frac{100\lambda}{2c}.$$

Wenn wir  $\lambda = 30 \mu = 3 \cdot 10^{-3}$  cm wählen, so folgt:

$$\vartheta = \frac{1}{2} 10^{-11} \text{ sec.}$$

Dies ist also eine untere Grenze für den  $\vartheta$ -Wert, den wir für diese Wellenlänge wählen können. — Wir gehen zur Bestimmung der Größenordnung der ganzen Zahl  $\bar{N}$  über. Diese Zahl muß, im Verhältnis zu der Zahl der Vorzeichenkombinationen

1) Dieses Resultat steht in bester Übereinstimmung mit der Planckschen Auffassung von der Konstitution des natürlichen Lichtes. Dagegen steht Hrn. Lorentz' Theorie im Widerspruch mit dieser Auffassung.

unter den Größen  $\xi_{2nM \pm m}$  groß sein. Da die Zahl dieser Größen:

$$\frac{\vartheta}{2M} = \frac{2c\vartheta}{\lambda}$$

ist, so ist die Zahl der Vorzeichenkombinationen unter ihnen:

$$2^{\frac{2c\vartheta}{\lambda}} = 2^{100} = 10^{30}.$$

$\bar{N}$  muß also gegen  $10^{30}$  und  $\bar{N}\vartheta = \Theta$  gegen  $\frac{1}{2} 10^{19}$  sec =  $\frac{1}{6} 10^{12}$  Jahre groß sein. So lang ist also die Zeit, die wir in Betracht nehmen müssen, damit wir sicher den oben berechneten Wert erwarten können.

Wie ist die ungeheure Länge dieser Zeit zu erklären? Unsere Ableitung der Formel zeigt dies deutlich. Sie zeigt, daß eine Metallplatte unter normalen Verhältnissen eine sehr geringe ultrarote Energie emittiert. Dagegen emittiert sie in den seltenen Zeiten, wo, durch das Spiel des Zufalls, der Schwerpunkt der Elektronen mehr oder weniger im Takt mit einer ultraroten Welle schwingt, äußerst stark. Wir müssen über so ungeheuer lange Zeiten mitteln, damit diese seltenen Gelegenheiten sicher in unsere Berechnung mitkommen und durch ihren Einfluß den Mittelwert zu dem oben erhaltenen Betrage erhöhen.

Unter diesen Umständen erhebt sich eine Frage: Wie groß ist die ultrarote Emission einer Metallplatte, wenn wir ausdrücklich voraussetzen, daß sie im normalen Zustande ist? Man kann gegen diese Fragestellung einwenden, daß sie zu unbestimmt ist, weil wir den Ausdruck „normaler Zustand“ nicht exakt definiert haben. Man darf aber nicht vergessen, daß man auch in anderen Teilen der kinetischen Theorie einen ähnlichen Vorbehalt macht. Wenn man in der kinetischen Gastheorie die Bewegungsgleichungen eines reibenden Gases ableitet, so setzt man von Anfang an voraus, daß das Gas sich im normalen Zustande befindet. Andernfalls würde man nicht die Reibungsglieder erhalten können. Von dem kinetischen Gesichtspunkte aus ist ja ein Übergang von Wärme in Bewegung ebenso möglich (wenn auch nicht ebenso wahrscheinlich) wie der umgekehrte Vorgang. Wie dem auch sei, sicher ist, daß, wenn wir unsere Strahlungsformel mit den Tatsachen vergleichen wollen, wir die soeben aufgestellte Frage und keine andere zu beantworten haben. Wie groß

die Ausstrahlung während  $10^{12}$  Jahren durchschnittlich ist, diese Frage hat kein physikalisches Interesse, wenn wir nicht feststellen können, daß das Metall während einer Stunde oder einer Minute durchschnittlich ebensoviel emittiert.

Ich gelange also zu dem Ergebnis, daß trotz der großen Mühe, die man der Frage von der Absorption und Emission einer Metallplatte zugewendet hat, diese Frage noch nicht gelöst ist. Wegen eines logisch-mathematischen Fehlers, der, soweit ich finden konnte, allen Autoren auf diesem Gebiete gemeinsam ist, hat man sich nicht die präliminäre Frage gestellt, ob das Problem, das die statistischen Methoden zu beantworten gestatten, dasselbe ist, das uns die Experimentalphysik gestellt hat.

Ich veröffentliche diese Zeilen in der Hoffnung, dadurch irgend einen der auf diesem Gebiete tätigen Forscher zur Beantwortung dieser präliminären Frage anzuregen.

Uppsala, im Dezember 1915.

(Eingegangen 7. Dezember 1915.)

ich ist,  
r nicht  
de oder

großen  
Emissi-  
e noch  
Fehlers,  
em Ge-  
Frage  
den zu  
mental-

dadurch  
zur Be-

#### 4. *Wärmeausdehnung und Kompressibilität von Flüssigkeiten bei tiefen Temperaturen;* von *W. Seitz, H. Alterthum und G. Lechner.*

##### 1. Teil. Wärmeausdehnung.

Mehr als zwei Jahrzehnte hindurch bemühte man sich mit größerem oder kleinem Erfolg, die erweiterten Gasgesetze auch auf die Flüssigkeiten anzuwenden. In neuerer Zeit gewinnt aber die Ansicht Raum, der flüssige Aggregatzustand stehe in molekularer Beziehung gewissermaßen in der Mitte zwischen dem gasförmigen und dem festen. Die Verwandtschaft zwischen der molekularen Struktur flüssiger und fester Körper müßte vor allem bei Temperaturen und Drucken, welche weit vom Dampfungszustand entfernt sind, d. i. also vor allem bei tiefen Temperaturen, bei denen die Wärmebewegung der Molekel klein ist, zutage treten. Zur Prüfung dieser Frage fehlt uns vorerst ein genügendes Zahlenmaterial. Hier eine Lücke auszufüllen, war Zweck der im Folgenden zu beschreibenden Untersuchungen.

Das spezifische Volumen der Flüssigkeiten bei Drucken, die gleich oder kleiner als eine Atmosphäre sind, in seiner Abhängigkeit von der Temperatur wurde nach der allgemein üblichen Dilatometermethode gemessen. Die Dilatometer, welche aus Boraxglas Nr. 59. III, nach Art der Einschlußthermometer hergestellt waren, hatten ein Gefäß von 10 cm Länge, 1,5 cm Weite und einem Hohlraum von 13,0154 ccm.<sup>1)</sup>

Auf der Röhre, welche die 24 cm lange Meßkapillare umschloß, war die Teilung eingezogen. Einem Zentimeter Skalenlänge entsprach ein Kapillarvolumen von 0,0483463 ccm. Oben endete die Kapillare in einen Behälter von 2 ccm Inhalt. Durch mehr-

1) Bei einigen Messungen wurde ein Dilatometer verwendet, dessen Gefäß 14,03906 ccm faßte und dessen Kapillarvolumen pro cm Länge gleich 0,049148 ccm betrug.

faches, sorgfältiges Auswägen mit Quecksilber von  $0^{\circ}$  wurde das Dilatometergefäß und die Meßskala aufs Genaueste geeicht.

Beim Einfüllen wurde die Luft, welche in den zu untersuchenden Flüssigkeiten gelöst ist, nach Möglichkeit durch Erwärmen oder unter der Luftpumpe ausgetrieben und dann das Dilatometer über dem oberen Behälter abgeschmolzen. Als Thermostat diente ein großer Dewarbecher von 10 cm innerem Durchmesser und 38 cm innerer Höhe. Die Wände waren bis auf einen 2,5 cm breiten Längsstreifen auf beiden gegenüberliegenden Seiten, welcher die Durchsicht gestattete, versilbert. Anfangs wurde als Thermostatenflüssigkeit Petroläther, später ausschließlich Äthylalkohol verwendet, der bis  $-75^{\circ}$  durch Hineinwerfen von fester Kohlensäure gekühlt wurde. Bei einiger Übung kann man es leicht erreichen, daß durch zeitweises Einführen kleiner Kohlensäurestückchen von geeigneter Größe die Temperaturschwankungen des Bades unter  $\pm 0,1^{\circ}$  gehalten werden. Im Mittel sind die Temperaturen bis auf  $\pm 0,02^{\circ}$  sicher bestimmt. Bei Messungen zwischen  $-75^{\circ}$  und  $-120^{\circ}$  wurde flüssige Luft tropfenweise auf die Badflüssigkeit gespritzt und auf diese Weise eine noch etwas größere Konstanz der Temperatur erzielt als durch das Einwerfen von Kohlensäurestückchen.

Die Temperatur des Bades wurde bis  $-38^{\circ}$  mit Hilfe eines Quecksilberthermometers, das in  $\frac{1}{10}$  Grade geteilt war und das eine Schätzung von  $\frac{1}{100}^{\circ}$  gestattete, gemessen. Bei tieferen Temperaturen wurden zwei in  $\frac{1}{10}^{\circ}$  geteilte Pentanthermometer verwendet, von denen das eine einen Meßbereich von  $-30$  bis  $-84^{\circ}$ , das andere einen solchen von  $-79$  bis  $-125^{\circ}$  hatte. Diese Thermometer sind von Burger in Berlin hergestellt und ebenso wie das Quecksilberthermometer an der Reichsanstalt geeicht. Am oberen Ende der Thermometerkapillare befindet sich eine Erweiterung und an diese schließt sich eine kurze, ebenfalls in  $\frac{1}{10}$  Grade geteilte Skala an welche den Eispunkt der Thermometer von Zeit zu Zeit nachzukontrollieren gestattet. Im Verlaufe von  $1\frac{1}{2}$  Jahren konnte eine Veränderung der Einstellung in frischgefallenem Schnee nicht beobachtet werden. Die Ablesung der Pentanthermometer war bis auf  $0,02^{\circ}$  genau. Wenn man die bei diesen Instrumenten gebotenen Vorsichtsmaßregeln, vor allem jene beachtet, daß



man bei der Abkühlung anfangs nur das Gefäß eintaucht und durch Erwärmen des oberen Teiles die Flüssigkeitsteile, welche noch in der Kapillare hängen, vertreibt, so ist die Ablesung sehr zuverlässig und das Arbeiten ist sehr bequem. Wir zogen sie daher den Platinthermometern, welche wir anfangs benutzten, schließlich vor. Diese haben den großen Nachteil, daß sie einen Beobachter vollständig in Anspruch nehmen. Auch sind sie bekanntlich mit manchen Fehlerquellen behaftet, deren Vermeidung sehr große Sorgfalt bedarf, vor allem, wenn es sich, wie hier, um die Messung des absoluten Wertes der Temperatur handelt und nicht, wie bei der Bestimmung der spezifischen Wärme, nur um Temperaturdifferenzen.

Für einen lebhaften Temperatúrausgleich in der Badflüssigkeit sorgte ein senkrecht auf- und abgehender Rührer, welcher nach den Angaben von Rothe<sup>1)</sup> konstruiert war, und der durch einen Elektromotor getrieben war.

Sollten aber trotzdem kleine Temperaturdifferenzen im Bade vorhanden gewesen sein, so war deren Einfluß dadurch auf ein Minimum reduziert, daß das Dilatometergefäß und das Thermometergefäß dicht aneinander anlagen. Selbstverständlich waren Dilatometer und Thermometer so tief in das Bad eingetaucht, daß die abzulesenden Stellen der Skalen von der Flüssigkeit umspült waren. Bis  $-119^{\circ}$  blieb der Alkohol des Thermostaten genügend klar, um die Ablesungen aufs genaueste ausführen zu können.

In einer Meßreihe folgten die einzelnen Beobachtungen in einem Abstand von  $5-8^{\circ}$  aufeinander. Selbstverständlich wurde nach einem Übergang von einer Temperatur zur nächsten so lange gewartet, bis Thermometer und Dilatometer keinen Gang in einer Richtung mehr zeigten, und es wurden dann abwechselnd 10—20 Ablesungen an den beiden Instrumenten gemacht.

Sämtliche Flüssigkeiten, welche untersucht wurden, waren als „reinst“ von Kahlbaum bezogen worden. Besondere Angaben über ihr spezifisches Gewicht, das nach dem Pyknometerverfahren bei  $0^{\circ}$  bestimmt wurde, finden sich in einigen Tabellen. Schwefelkohlenstoff wurde zur Entfernung kleiner

1) Rothe, Zeitschr. f. Instrumentenkunde 22. p. 14. 1902.

Mengen gelösten Schwefels mit reinstem Quecksilber geschüttelt und stand dauernd bei Lichtabschluß über Quecksilber. Gleichwohl trübte sich die Flüssigkeit bei  $-80^{\circ}$  unter Ausscheidung geringer Mengen von Schwefel. Äthylalkohol wurde, um ihn nach Möglichkeit vom Wasser zu befreien, über Kalk destilliert.<sup>1)</sup>

Der Äthyläther wurde über Natriumdraht aufbewahrt.

In die allgemein bekannte Formel, nach der die Berechnung des spezifischen Volumens der Flüssigkeiten bei den verschiedenen Temperaturen erfolgt, sind als Wärmeausdehnungskoeffizienten  $\gamma$  des Glases Nr. 59. III die Werte eingesetzt, welche aus den Messungen von Henning<sup>2)</sup> sich ergeben, nämlich:

$$\gamma = (15,942 + 0,01818 t) \cdot 10^{-6}.$$

Ein weitere Korrektur erfordert der Umstand, daß ein Teil der untersuchten Substanz in dampfförmigem Zustande den freien Raum über der Flüssigkeitssäule erfüllt, und daß dieser Teil mit sinkender Temperatur immer kleiner und kleiner wird. Es muß daher die Gewichtsmenge des bei verschiedenen Temperaturen vorhandenen Dampfes berechnet werden, und hieraus das Volumen  $C$ , welches diese Gewichtsmenge kondensiert einnehmen würde. Schließlich wird  $C$  zum beobachteten Flüssigkeitsvolumen addiert, wodurch wir das wahre Volumen erhalten, welches die gesamte Substanz einnehmen würde, wenn sie vollständig kondensiert wäre.

Wenn

$Q$  das Volumen des Dampfraumes,

$\delta$  die Dichte des gesättigten Dampfes bei der absoluten Temperatur  $T$  der Flüssigkeit,

$T'$  die absolute Temperatur des Dampfraumes, welche mit Hilfe eines Quecksilberthermometers das an dem oberen, aus dem Bade herausragenden Teil des Dilatometers angelegt war, direkt bestimmt wurde,

$v_T$  das spezifische Volumen der Flüssigkeit bei  $T^0$ , bedeutet, so ist die anzubringende Korrektur:

$$C = \frac{Q \cdot \delta \cdot T \cdot v_T}{T'}.$$

1) Hrn. Privatdozenten Dr. Lipp, welcher die große Freundlichkeit hatte, diese Arbeit im organisch-chemischen Laboratorium auszuführen, sprechen wir hiermit unseren besten Dank aus.

2) F. Henning, Ann. d. Phys. 40. p. 639. 1913.

Da dieses Korrekturglied in allen Fällen klein ist, so genügt eine angenäherte Kenntnis aller Größen, die in obigem Ausdruck enthalten sind, und ist die Anwendung des Boyle-Gay-Lussacschen Gesetzes erlaubt.

Die Dichte  $\delta$  des gesättigten Dampfes ist für Äthylalkohol, Äthyläther und Schwefelkohlenstoff für alle Temperaturen, um die es sich hier handelt, in Winkelmanns Handbuch, 2. Aufl. (p. 985, 1003, 1017, 1021 und 1029) angegeben, für Methylalkohol und Isopentan nur von  $0^\circ$  aufwärts. Bei diesen Flüssigkeiten mußte deshalb bei tieferen Temperaturen  $\delta$  nach dem Boyle-Gay-Lussacschen Gesetz aus den Dampfdrucken, welche in Winkelmanns Handbuch angegeben sind, berechnet werden.

Um den Einfluß von  $C$  auf die Resultate beurteilen zu können, sind im Folgenden für eine Substanz von hohem und eine von relativ niederem Dampfdruck, nämlich für Isopentan und Schwefelkohlenstoff, ausführliche Tabellen angegeben.

Es bedeutet

$t$  die Temperatur der Flüssigkeit,

$D$  die Dilatometereinstellung in cm, an welcher bereits die Eichungskorrektur des Dilatometers angebracht ist,

$sv$  das scheinbare Volumen der Flüssigkeit (d. h. ohne Berücksichtigung der Wärmeausdehnung des Glases),

$wv$  das wahre Volumen der Flüssigkeit,

$spv$  das spezifische Volumen der Flüssigkeit, das sich schließlich für die einzelnen Temperaturen ergibt, wobei  $v$  für  $t = 0^\circ$  gleich 1,00000 gesetzt ist.

Tabelle I.  
Pentan (Isopentan).

$t$	$D$	$sv$	$wv$	$Q$	$C$	$wv + C$	$spv$	Kurvenwerte
0	21,355	14,0478	14,0478	2,27	0,0039	14,0517	1,00000	1,00000
- 4,74	19,31	13,9490	13,9480	2,41	0,0033	13,9513	0,99282	0,99282
-10,21	17,00	13,8373	13,8351	2,51	0,0025	13,8376	0,98476	0,98471
-20,31	12,88	13,6381	13,6337	2,71	0,0016	13,6353	0,97037	0,97037
-30,66	8,825	13,4421	13,4358	2,91	0,0011	13,4369	0,95625	0,95628
-39,95	5,40	13,2765	13,2685	3,02	0,0007	13,2692	0,94431	0,94428
-51,58	1,225	13,0746	13,0644	3,27	0,0002	13,0646	0,92974	0,92969

Tabelle II.  
Schwefelkohlenstoff.

$t$	$D$	$sv$	$wv$	$Q$	$C$	$wv + C$	$spv$	Kurven- werte
+ 13,46	25,73	14,2594	14,2627	2,05	0,0016	14,2643	1,01575	1,01573
+ 7,15	23,54	14,1536	14,1553	2,16	0,0013	14,1566	1,00808	1,00812
0	21,235	14,0421	14,0421	2,27	0,0010	14,0431	1,00000	1,00000
- 5,16	19,595	13,9628	13,9615	2,40	0,0009	13,9624	0,99425	0,99420
- 11,95	17,45	13,8591	13,8566	2,50	0,0008	13,8574	0,98677	0,98678
- 20,45	14,79	13,7305	13,7261	2,61	0,0004	13,7265	0,97745	0,97753
- 28,61	12,32	13,6111	13,6051	2,71	0,0002	13,6053	0,96882	0,96881
- 34,30	10,63	13,5294	13,5221	2,81	0,0001	13,5222	0,96290	0,96306
- 44,97	7,51	13,3785	13,3694	—	—	13,3694	0,95202	0,95211
- 53,19	5,19	13,2663	13,2557	—	—	13,2557	0,94392	0,94391
- 63,33	2,35	13,1290	13,1171	—	—	13,1171	0,93405	0,93407

Die so direkt gefundenen Werte  $v$  wurden auf Koordinatenpapier eingetragen und möglichst gleichmäßige Kurven hindurchgezogen. Die Kurvenwerte sind in den letzten Kolonnen der Tabellen I und II angegeben und weichen, wie zu ersehen ist, wenig, nur ganz selten um mehr als  $\pm 0,1$  Promille, von den gemessenen Werten ab.

Eine Ausnahme hiervon macht der Äthylalkohol. Hier konnten bei Temperaturen unter  $-80^\circ$  übereinstimmende Resultate nicht erzielt werden, weshalb diese Messungen mehrfach wiederholt wurden. Die Abweichungen zwischen den einzelnen Meßreihen erreichen bei  $-115^\circ$  bis zu 0,5 Promille, eine Erscheinung, welche vermutlich auf den unvermeidlichen Wassergehalt, welcher bei den einzelnen Füllungen vielleicht etwas verschieden war, zurückzuführen ist. Da wir augenblicklich nicht in der Lage sind, die Untersuchungen fortzuführen, soll die Klärung dieser Frage auf eine spätere Zeit verspart werden.

In den nachfolgenden Tabellen III bis VII sind nur die Kurvenwerte angegeben, ferner der Wärmeausdehnungskoeffizient  $\alpha$  und dessen Temperaturkoeffizient  $\frac{1}{\alpha} \frac{d\alpha}{dt}$ .

$$\alpha = \frac{1}{v} \frac{dv}{dt}$$

ist von  $20$  zu  $20^\circ$  nach folgender Methode berechnet bei  $-10^\circ$ :

$$\alpha_{-10} = \frac{v_{0^\circ} - v_{-20^\circ}}{20 \cdot v_{-10^\circ}}$$

und in gleicher Weise ist die Berechnung von  $1/\alpha \, d\alpha/dt$  durchgeführt.

Wenn der wahrscheinliche Fehler von  $v$  unter  $\frac{1}{10}$  Promille liegt, so ist der von  $a$  kleiner als 1 Proz.

Auf die merkwürdige Tatsache, daß  $\frac{1}{a} \frac{da}{dT}$  für Methylalkohol, Äthylalkohol und Schwefelkohlenstoff bei tiefen Temperaturen negativ wird, soll später zurückgekommen werden.

Tabelle III.

Isopentan.

Temp.	$v$	$\alpha$	$\frac{1}{\alpha} \frac{d\alpha}{dT}$
+ 10	1,0157		
0	1,0000	0,00153 <sub>3</sub>	
- 10	0,9850 <sub>5</sub>	0,00148 <sub>1</sub>	0,0033
- 20	0,9708	0,00143 <sub>8</sub>	0,0032
- 30	0,9572	0,00138 <sub>9</sub>	0,0031
- 40	0,9442	0,00135 <sub>1</sub>	0,0023
- 50	0,9316 <sub>5</sub>	0,00132 <sub>3</sub>	0,0017
- 60	0,9194 <sub>5</sub>	0,00131 <sub>1</sub>	0,0013
- 70	0,9075 <sub>5</sub>	0,00129 <sub>4</sub>	0,0012
- 80	0,8959 <sub>5</sub>	0,00127 <sub>9</sub>	0,0012
- 90	0,8846 <sub>5</sub>	0,00126 <sub>3</sub>	0,0011
-100	0,8736	0,00125 <sub>1</sub>	0,0012
-110	0,8628	0,00123 <sub>5</sub>	
-120	0,8523		

Tabelle IV.

Äther.

Temp.	$v$	$\alpha$	$\frac{1}{\alpha} \frac{d\alpha}{dT}$
+ 10	1,0156		
0	1,0000	0,001520	
- 10	0,9851 <sub>5</sub>	0,00146 <sub>3</sub>	0,0034
- 20	0,9710 <sub>5</sub>	0,00142 <sub>7</sub>	0,0031
- 30	0,9575 <sub>5</sub>	0,00137 <sub>9</sub>	0,0029
- 40	0,9446 <sub>5</sub>	0,00134 <sub>1</sub>	0,0025
- 50	0,9322	0,00131 <sub>3</sub>	0,0017
- 60	0,9201 <sub>5</sub>	0,00129 <sub>7</sub>	0,0012
- 70	0,9083 <sub>5</sub>	0,00128 <sub>1</sub>	0,0016
- 80	0,8969	0,00125 <sub>5</sub>	0,0017
- 90	0,8858	0,00123 <sub>7</sub>	0,0018
-100	0,8750	0,00121 <sub>1</sub>	0,0015
-110	0,8646	0,00120 <sub>0</sub>	
-120	0,8542 <sub>5</sub>		

Tabelle V.

Methylalkohol

spez. Gewicht bei 0° 0,8128  
99,05 %.

Temp.	$v$	$\alpha$	$\frac{1}{\alpha} \frac{d\alpha}{dT}$
+ 10	1,0116 <sub>5</sub>		
0	1,0000	0,00115 <sub>3</sub>	
- 10	0,9886	0,00113 <sub>9</sub>	0,0014
- 20	0,9775	0,00112 <sub>0</sub>	0,0014
- 30	0,9667	0,00110 <sub>7</sub>	0,0008
- 40	0,9561	0,00110 <sub>3</sub>	0,0001
- 50	0,9456	0,00110 <sub>5</sub>	-0,0002
- 60	0,9352	0,00110 <sub>7</sub>	-0,0006
- 70	0,9249	0,00111 <sub>1</sub>	-0,0011
- 80	0,9145 <sub>5</sub>	0,00113 <sub>1</sub>	-0,0011
- 90	0,9042	0,00114 <sub>3</sub>	
-100	0,8939		

Tabelle VI.

Äthylalkohol

spez. Gewicht bei 0° 0,8065  
99,9 %.

Temp.	$v$	$\alpha$	$\frac{1}{\alpha} \frac{d\alpha}{dT}$
+ 10	1,0106		
0	1,0000	0,00105 <sub>0</sub>	
- 10	0,9896	0,00103 <sub>3</sub>	0,0011
- 20	0,9794 <sub>5</sub>	0,00102 <sub>7</sub>	0,0009
- 30	0,9695	0,00101 <sub>0</sub>	0,0005
- 40	0,9597	0,00101 <sub>7</sub>	0,0000
- 50	0,9500	0,00101 <sub>0</sub>	-0,0002
- 60	0,9403 <sub>5</sub>	0,00102 <sub>7</sub>	-0,0005
- 70	0,9307 <sub>5</sub>	0,00102 <sub>3</sub>	-0,0005
- 80	0,9212	0,00103 <sub>3</sub>	-0,0007
- 90	0,9117	0,00104 <sub>7</sub>	-0,0012
-100	0,9021 <sub>5</sub>	0,00105 <sub>0</sub>	
-110	0,8926		
-115	0,8878		

Kurven-  
werte

1,01575  
1,00812  
1,00000  
0,99420  
0,98678  
0,97753  
0,96881  
0,96300  
0,95211  
0,94391  
0,93407

Koordinaten  
Kurven  
en Ko-  
wie zu  
1 Pro-

Hier  
de Re-  
ehrfach  
anzeln  
ne Er-  
Wasser-  
etwas  
licklich  
en, soll  
werden.  
nur die  
skoeffi-

- 10°.

$da/dT$

Tabelle VII.  
Schwefelkohlenstoff.

Temp.	$v$	$\alpha$	$\frac{1}{\alpha} \frac{d\alpha}{dT}$
+ 10 <sup>0</sup>	1,01155		
0	1,0000	0,00113 <sub>2</sub>	
- 10	0,9889	0,00110 <sub>9</sub>	0,0015
- 20	0,9780 <sub>5</sub>	0,00109 <sub>9</sub>	0,0013
- 30	0,9674 <sub>5</sub>	0,00108 <sub>1</sub>	0,0016
- 40	0,9571	0,00106 <sub>1</sub>	0,0016
- 50	0,9470 <sub>5</sub>	0,00104 <sub>3</sub>	0,0014
- 60	0,9372 <sub>5</sub>	0,00103 <sub>4</sub>	0,0009
- 70	0,9276 <sub>5</sub>	0,00102 <sub>9</sub>	0,0002
- 80	0,9181 <sub>3</sub>	0,00102 <sub>9</sub>	- 0,0001
- 90	0,9087 <sub>5</sub>	0,00103 <sub>1</sub>	- 0,0004
- 100	0,8994	0,00103 <sub>7</sub>	
- 110	0,8901		

Aachen, Juli 1915.

(Eingegangen 2. Dezember 1915.)

5. *Wärmeausdehnung und Kompressibilität von Flüssigkeiten bei tiefen Temperaturen;*  
*von W. Seitz und G. Lechner.*

II. Teil.

Die Voruntersuchungen in dieser Arbeit, welche die Fortsetzung der in den Ann. d. Phys. 49. p. 85—92 veröffentlichten ist, wurden gemeinsam mit Hrn. Alterthum ausgeführt.

Die Meßmethode der Kompressibilität entspricht in ihren Grundzügen der, welche Amagat bei seinen bekannten Messungen angewandt hat, doch mußte sie in mancher Beziehung vor allem mit Rücksicht auf die tiefen Temperaturen abgeändert werden.

Die Gestalt der Piezometer, welche ebenso wie die früher benutzten Dilatometer aus Glas Nr. 59. III angefertigt waren, ist aus Fig. 1 zu ersehen. Das obere, sehr dünnwandige Gefäß hatte ein Hohlvolumen von 2,18794 ccm, bzw. 2,37358 ccm, eine Länge von 3,6 cm, bzw. 3,8 cm und einen äußeren Durchmesser von 1,05 cm. An diesen schloß sich eine 18,2 cm lange Kapillare von ungefähr 0,28 cm äußerem Durchmesser und einer lichten Weite von 0,02110 cm, bzw. 0,02274 cm, und an die Kapillare das Skalenröhrchen von 9 cm Länge und ungefähr 0,3 cm äußerem Durchmesser. Auf diesem war eine 7 cm lange Millimeterteilung eingätzt und eingefärbt, wobei die Zehnerteilstriche durch Punkte oder Schraffierung voneinander unterscheidbar gemacht waren. Einem Millimeter der Teilung entspricht ein Volumen 0,001404, bzw. 0,002202 ccm. Das untere Ende des Meßröhrchens war durch einen Schliff mit dem kleinen 2,5 cm langen, unten offenen Behälter *B* verbunden. Da der Kompressionsapparat stets nur bei Zimmertemperatur zusammengesetzt werden konnte, so mußte dieser Behälter für die Messungen, welche sich auf sehr tiefe Temperaturen und hohe Drucke erstrecken sollten, eine beträchtliche Kapazität und demnach einen solchen Durchmesser besitzen,

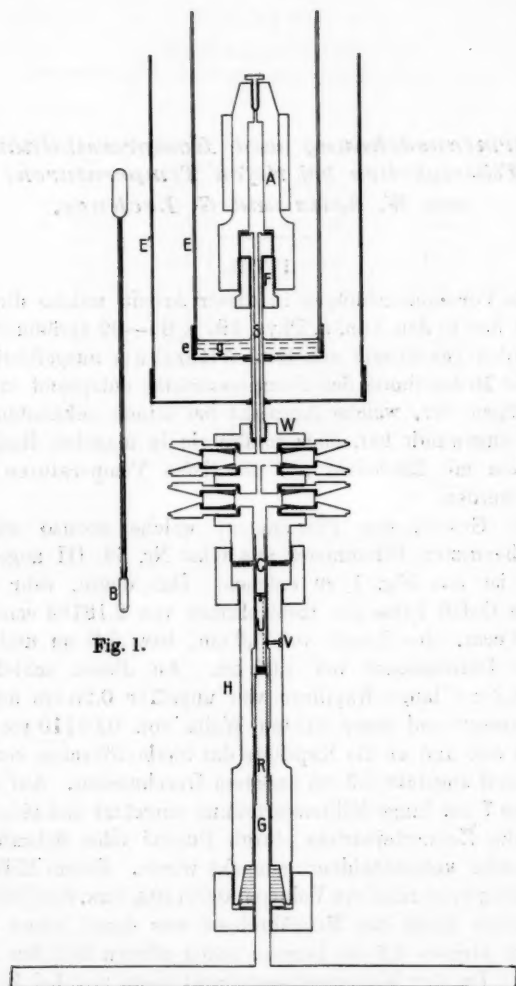


Fig. 1.

Fig. 2.

daß er durch das Stahlrohr *S* (vgl. Fig. 2) nicht hindurchgeführt werden konnte. Er durfte daher nicht mit dem Meßröhrchen verschmolzen sein.



Die Eichung des oberen Piezometergefäßes, der Kapillare, der Teilung und des kurzen Stückes des Meßröhrchens, das zwischen der Kapillare und dem obersten Teilstrich liegt, wurde aufs genaueste durch Auswägen mit Quecksilber von 0° durchgeführt.

Der Kompressionsapparat, in welchem sich das Piezometer (in Fig. 2 weggelassen) befand, ist aus Fig. 2 zu ersehen.

Der obere aus Nickelstahl verfertigte Körper *A*, welcher das Piezometergefäß und ein kurzes Stück der Kapillare umschloß, hatte eine Wandstärke von 1,2 cm und war durch einen 0,7 cm dicken und 7 cm langen Schrumpfring verstärkt.

Eine Öffnung am oberen Ende, welche durch eine Schraube mit konischer Spitze zu verschließen war, diente dazu, beim Füllen des Apparates die Luftblasen austreten zu lassen. Schraube *F* stellt die Verbindung zwischen Körper *A* und dem Nickelstahlrohr *S*, das eine Wandstärke von 0,3 cm, eine lichte Weite von 0,35 cm und eine Länge von 15,7 cm hatte, her. Hier, wie auch an allen übrigen Verbindungsstellen, wurden 2 mm starke Dichtungsringe aus Aluminium verwendet. Die Stahlflächen, welche darauf preßten, waren mit je drei ringförmigen, etwa 1 mm hohen Schneiden versehen, die tief in das weiche Aluminium eindrangen. Da die Schraube *F* gleichwohl mit großer Kraft angezogen werden mußte, um auch bei hohen Drucken und bei großen Temperaturveränderungen dicht zu bleiben, wobei das enge Stahlrohr leicht verbogen und die Kapillare des Piezometers, die im Rohr nur sehr geringen Spielraum haben durfte, zerbrochen werden konnte, so wurden eigens für diesen Zweck zwei sehr starke Schlüssel angefertigt, die durch eine Schraube gegeneinander bewegt werden, ohne dabei auf das Stahlrohr *S* einen Zug oder Druck auszuüben. Rohr *S* ist in den Nickelstahlwürfel *W* eingeschraubt, an welchem der Anschluß zur Druckleitung *L* (in der Fig. 2 nicht sichtbar) und die 4 Beobachtungsfenster angebracht sind.

Während der Apparat von Amagat nur ein Fensterpaar hatte, verwendeten wir zwei, um eine größere Skalenlänge des Piezometers beobachten zu können, ohne dieses entsprechend weite Strecken hin- und herschieben zu müssen. Es hätte dies eine übermäßig lange Schraube *R* erfordert, was zu technischen Schwierigkeiten geführt hätte, ferner hätte man dem Körper *A*

eine größere Länge geben müssen, wodurch die Genauigkeit der Temperaturbestimmung herabgesetzt worden wäre. Bei unserer Anordnung brauchte das Piezometer höchstens um 3,5 cm im Körper *A* verschoben zu werden, wenn alle Punkte der ganzen Skala nacheinander abgelesen werden sollten.

Anfangs bestanden entsprechend den Angaben Amagats die Fenster aus zylinderförmigen Crown-Glassäulen von 9 cm Länge und 1 cm Durchmesser, welche mit Marineleim in Stahlrohre von 1 cm lichter Weite und  $\frac{1}{2}$  cm Wandstärke eingekittet waren. Die äußere plane Endfläche jeder Glassäule preßte gegen einen dünnen Ring aus Zelluloid, welcher die Dichtung zwischen ihr und dem Stahlgehäuse vervollständigte. Um ferner zu verhüten, daß das Benzin, mit dem der ganze Stahlapparat gefüllt war, den Marineleim auflöste, war in der Nähe der inneren Endfläche der Glassäule eine ringförmige Vertiefung in die Stahlwand gedreht, die, mit Quecksilber gefüllt, das Benzin vom Marineleim trennen sollte. Jedoch genügte diese Vorrichtung ihrem Zweck immer nur einige Zeit, allmählich drang das Benzin durch, löste den Marineleim auf und machte den Apparat undicht.

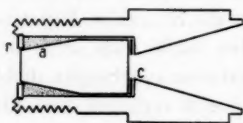


Fig. 3.

Wir wandten daher schließlich eine andere Anordnung an, ähnlich jener, welche von W. Wahl<sup>1)</sup> beschrieben wird. Wie in Fig. 3 zu sehen ist, bestand der Glaskörper aus einem abgestumpften Konus mit daran anschließendem Zylinder, wobei selbstverständlich die beiden Endflächen ebenso wie bei den oben beschriebenen Glaswänden plan geschliffen und poliert waren. (Die Figur gibt die Anordnung in natürlicher Größe.) *a* ist ein aus Vulkanfaser hergestellter Ring von keilförmigem Querschnitt, welcher dem Glaskonus genau angepaßt ist. Der schmale Eisenring *r*, welcher mit einigen Windungen in das Stahlgehäuse eingeschraubt ist, sorgt dafür, daß der Vulkanfaserling sich nicht lockern kann. Dieser wird durch den Druck, der im Apparat herrscht, so fest in die Fuge

1) W. Wahl, Phil. Trans. f. th. r. Soc. London, Serie A. 212. p. 128. 1912.

zwischen Glas und Stahl eingepreßt, daß die Fenster noch bei 1000 Atmosphären vollständig dicht halten. Nur bei niederen Drucken, unter 50 Atmosphären, kam es hier und da vor, daß etwas Flüssigkeit durchsickerte, es genügte aber, den Druck um einige hundert Atmosphären zu steigern, um diesen Übelstand sofort zu beheben. Der Zelluloidring *c* schützt den Glaskörper vor dem Zerspringen und vervollständigt die Abdichtung. Durch die Fenster konnte man die Höhe der Quecksilbersäule im Skalenrohr des Piezometers, das durch eine Mattglasglühlampe durch die Fenster der gegenüberliegenden Seite hell beleuchtet war, bis auf 0,1 mm genau schätzen.

An den Stahlwürfel *W* (vgl. Fig. 2) schließt sich, durch eine Schraube mit Überfangmutter und Aluminiumdichtungsring verbunden, das Stück *H* an. Die Schraube *R*, deren Spindel *G* durch eine aus Lederscheiben bestehende Stopfbüchse abgedichtet ist, hat eine Länge von 10 cm. An ihrem oberen Ende trägt sie das drehbar mit ihr verbundene Stück *U*. Dieses ist seiner Länge nach eingeschnitten, und in diese Nute greift ein Stift *V* ein, welcher im äußeren Gehäuse eingeschraubt und eingelötet ist. Dadurch hat Stück *U* eine Führung und macht die Drehungen der Schraube *R* nicht mit, wenn es von dieser herauf- oder heruntergeschoben wird. Ein sehr dünnwandiger Stahlbecher *C* von 4,6 cm Länge und 0,7 cm lichter Weite, der im Stück *U* durch ein kurzes Schräubchen jedesmal beim Zusammenstellen des Apparates befestigt und mit Quecksilber gefüllt wird, nimmt das untere Ende des Piezometers samt dem daran angeschliffenen kleinen Glasbehälter *B* auf. Am Halse von *B* sind Stahldrähtchen angebracht (in der Figur weggelassen), welche federnd gegen die Wand des Stahlbeckers *C* drücken und dadurch *B* auf dem Boden des mit Quecksilber gefüllten Beckers durch Reibung festhalten. Es ist der Schliff stets vollständig von Quecksilber außen bedeckt.

Da es große Schwierigkeiten machte, die untere Stopfbüchse, durch welche die Schraubenspindel hindurchgeht, gegen Benzin abzudichten, so wurde der Hohlraum von *H*, der bei allen Versuchen sich kaum unter Zimmertemperatur abkühlte, mit Glyzerin gefüllt, das bekanntlich schwerer als Benzin ist und sich mit ihm nicht mischt.

Das Zusammensetzen des Apparates vor jeder Messung bot anfangs große Schwierigkeiten. Erst durch viele vergebliche Versuche, bei welchen mehrere Piezometer zerbrachen, und welche beinahe die Hoffnung auf die Durchführbarkeit aussichtslos erscheinen ließen, erwarben die Beobachter die nötige Handfertigkeit. Schließlich kam es nur selten vor, daß beim Zusammensetzen oder Auseinandernehmen des Apparates eines der Piezometer Schaden litt.

Der Körper *A* war von der Badflüssigkeit der gewünschten Temperatur vollständig umspült. Der Boden des Behälters *E*, den diese aufzunehmen hatte, durfte, um das Zusammensetzen des Apparates zu gestatten, mit seiner zylinderförmigen Wand nicht dauernd fest verbunden sein. Als sehr geeignet zur Abdichtung des unteren Randes gegen den Zylinder bei *e* erwies es sich, den Boden mit einer wässerigen Gelatinelösung 2 cm hoch (in der Figur *g*) zu bedecken. Diese wurde nach ihrem Erstarren vom Alkohol der Badflüssigkeit nicht angegriffen und hielt auch bei den tiefsten Temperaturen vollkommen dicht. Die Zylinderwand selbst bestand aus Blech oder Glas. Zur Wärmeisolation wurde der Hohlraum zwischen *E* und dem äußeren Behälter *E'* mit Watte oder bei den Messungen mit den tiefsten Temperaturen mit Daunen sehr sorgfältig ausgestopft.

In der Badflüssigkeit sorgte ein Turbinenrührer für den Ausgleich der Temperatur. Diese wurde mit den 3 Thermometern, welche im ersten Teil der Arbeit beschrieben wurden, gemessen, nämlich bis  $-38^{\circ}$  mit einem Quecksilberthermometer und zwischen  $-38$  und  $75$ , bzw.  $-75$  und  $-120^{\circ}$  mit zwei Pentanthermometern. Sämtliche Instrumente waren in  $\frac{1}{10}$  Grade geteilt und bei der physikalisch-technischen Reichsanstalt geeicht worden. Ebenso wie bei den früher beschriebenen Dilatometerversuchen wurde der Alkohol des Bades durch Einwerfen fester Kohlensäure, bzw. durch Aufspritzen von flüssiger Luft gekühlt und auf der gewünschten Temperatur erhalten. Auch hier gelang dies mit genügender Konstanz; kurzdauernde Schwankungen, welche im übrigen nie mehr als höchstens  $\pm 0,3^{\circ}$  betrugen, machte der Metallkörper *A* infolge seiner großen Wärmekapazität kaum merklich mit. Die Temperatur des Würfels *W* konnte angenähert durch ein kleines Thermo-

meter beobachtet werden, dessen Gefäß sich in einer Bohrung (in der Figur nicht angegeben) des Stahlkörpers, welche mit Quecksilber gefüllt war, befand. Ferner wurde durch einen besonderen Versuch ermittelt, um wieviel die Temperatur des Raumes, in welchem das Meßrohr sich befand, d. i. der Hohlraum von Würfel  $W$  und das untere Stück von Stahlrohr  $S$ , sich von der äußeren Zimmertemperatur oder der am Würfel  $W$  außen beobachteten Temperatur unterschied, wenn der obere Raum tief abgekühlt war. Zu diesem Zweck wurde einmal der ganze Apparat ohne Piezometer zusammengestellt, mit Benzin wie immer gefüllt und ein Eisenkonstantanthermoelement durch die obere Öffnung  $A$ , die sonst durch eine Schraube mit konischer Spitze verschlossen ist, eingesenkt. Während das Kühlgefäß mit fester Kohlensäure gefüllt war, wurde die Lötstelle des Thermoelementes an verschiedenen hoch gelegene Punkte des inneren Hohlraumes von  $W$  und des Rohres  $S$  gebracht und so die Temperatur bestimmt. Diese ist im Inneren von  $W$  nur  $2-3^\circ$  geringer als diejenige, welche das kleine Thermometer in der seitlichen Bohrung an  $W$  angibt. Das starke Temperaturgefälle konzentriert sich auf das Stahlrohr, welches die enge Kapillare des Piezometers und je nach dessen Stellung noch ein kurzes Stück des Skalenröhrchens umhüllt. Wie aus der später folgenden Formel, durch die das spezifische Volumen der Untersuchungsflüssigkeit berechnet wird, sich ergibt, ist nur eine angenäherte Kenntnis der Temperatur des Skalenröhrchens nötig. Eine Ungenauigkeit von  $4^\circ$  würde sich im Resultat eben erst bemerkbar machen. Da der größte Teil des Skalenröhrchens sich im Hohlraum von  $W$ , ein kleiner im unteren Ende des Rohres  $S$ , dessen Temperatur nur wenig verschieden von  $W$  ist, befindet, so wurde bei den Berechnungen angenommen, die Temperatur des ganzen Skalenrohres liege um  $2^\circ$  unter der, welche außen an  $W$  beobachtet wurde. Das Volumen der engen Kapillare schließlich ist so gering gegenüber dem des Piezometergefäßes, daß es genügt, wenn man annimmt,  $\frac{2}{3}$  derselben habe die Temperatur des Kältebades,  $\frac{1}{3}$  die des Skalenrohres.

Die Anordnung der gesamten Apparatur ist aus Fig. 4 zu ersehen. Eine von Schäffer und Budenberg gelieferte Kompressionspumpe  $P$  diente dazu, auf etwa 300 Atm. zu pressen.

Sollten höhere Drucke erreicht werden, so wurde die Pumpenleitung durch ein in der Figur kaum sichtbares Ventil  $\delta$  abgesperrt, und der Druck durch den Kompressionszylinder  $X$  auf die gewünschte Höhe gebracht. Die Schraube dieses Zylinders hat eine Länge von 10 cm und einen Durchmesser von 1,2 cm. Ihre Spindel läuft in eine Stopfbüchse. Um sie

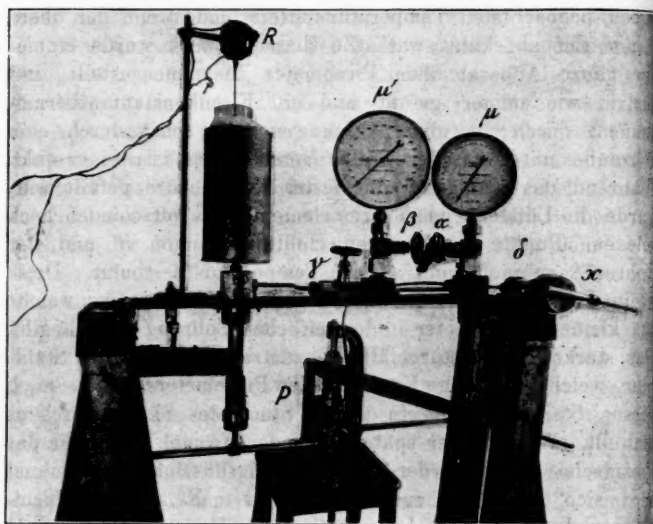


Fig. 4.

gegen Benzin abdichten, hat es sich als zweckmäßig erwiesen, sehr dünne Schichten von Plastellin zwischen die Lederringe zu bringen.  $R$  ist der Motor, welcher den Turbinenrührer des Bades treibt.  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  und  $\delta$  sind Absperrventile,  $\mu$  und  $\mu'$  die beiden Stahlrohrmanometer von Schäffer und Budenberg, deren Meßbereich von 0—600 Atm., bzw. 0—2000 Atm. reicht (eine Atmosphäre ist gleich 1 kg pro cm<sup>2</sup>).

Bis 500 Atm. wurde das erste Manometer ( $\mu$ ), von da ab das zweite  $\mu'$  benutzt und  $\mu$  durch Ventil  $\alpha$  abgesperrt. Von Zeit zu Zeit wurden die Manometer mit zwei ebenso konstruierten Instrumenten verglichen, welche jährlich zweimal an

der Physikalisch-Technischen Reichsanstalt geprüft wurden, und welche bei den Versuchen selbst keine Verwendung fanden.

Die Federmanometer gestatten die gleiche Meßgenauigkeit wie die früher z. B. von Amagat benutzten Druckwagen, haben aber den Vorteil viel größerer Einfachheit. Elastische Nachwirkungen bei Druckänderungen, die durch einen Gang der Piezometereinstellung sich hätten bemerkbar machen müssen, konnten niemals beobachtet werden. Am kleineren Manometer konnten  $\frac{1}{10}$  Atm., am größeren  $\frac{1}{2}$  Atm. noch abgeschätzt werden. Die ganze Apparatur, einschließlich der Kompressionspumpe, war möglichst luftfrei mit Benzin gefüllt, das im gekühlten Teil selbst bei der tiefsten Versuchstemperatur von  $-110^{\circ}$  leicht flüssig blieb. Selbstverständlich ist es nicht möglich, sämtliche Verschraubungen und Stopfbüchsen absolut dicht zu machen; um daher während einer Piezometermessung, welche meist aus 10—20 einzelnen Ablesungen bestand und 5—10 Minuten dauerte, den gewünschten Druck konstant zu halten, mußte die Kompressionsschraube *X* fortgesetzt langsam nachreguliert werden. Da die Schwierigkeit, den Apparat genügend dicht zu machen, mit dem Druck sehr stark wächst, so verzichteten wir darauf, über 1000 Atm. hinauszugehen.

Die wesentlichste Fehlerquelle lag in der Unsicherheit, mit der sich der Meniskus der Quecksilbersäule im Skalenröhrchen einstellt, da das Quecksilber vor allem bei sinkendem Druck am Glas haftet. Diese Fehlerquelle machten wir dadurch möglichst unschädlich, daß wir vor jeder Ablesung durch geringe Druckerniedrigung den Meniskus ungefähr um einen halben Millimeter sinken ließen und dann den Druck auf seine neue auf seinen richtigen Wert brachten. Dies wurde so oft wiederholt, bis nahezu konstante Resultate sich ergaben. Die Sicherheit der Einstellung war im Mittel ungefähr 0,2—0,3 Millimeter, d. i. etwa 0,15, bzw. 0,2 Promille des gesamten Piezometervolumens.

Während einer ganzen Meßreihe, welche sich über ein möglichst großes Druckintervall erstreckte, wurde die Badtemperatur konstant gehalten. Die Messungen folgten von 50 zu 50 Atm. aufeinander.



## Berechnung der Versuche.

Es sei

$V_g$  das Volumen des oberen Piezometergefäßes  $+ \frac{2}{3}$  des Volumens der engen Kapillare,

$V_s$  das Volumen, gerechnet vom obersten Teilstrich des Skalenrohres bis zum Anfang der Kapillare  $+ \frac{1}{3}$  des Volumens der engen Kapillare,

$q$  das Volumen zwischen zwei Teilstreichen der Skala,

$N$  die Anzahl Teilstreiche vom obersten an bis zu jenem Punkt, an der die Quecksilbersäule endet, wenn der Druck  $= p$  Atmosphären ist,

$N'$  die entsprechende Anzahl Teilstreiche, wenn der Druck  $= p'$  Atmosphären ist,

$t$  ist die Temperatur des Piezometergefäßes, d. i. die des Bades;

$t'$  die Temperatur des Skalenrohres, d. i. die außen gemessene Temperatur des Stahlwürfels, vermindert um  $1-3^\circ$ ,

$v$  ist das spezifische Volumen der zu untersuchenden Flüssigkeit bei  $t^0$  und dem Druck  $p$ ,

$$d_{pt} = 1/v,$$

$d_{pt}$  ist die Dichte der Flüssigkeit bei  $t^0$  und Druck  $p$ ,

$d_{p't}$  bei  $t^0$  und Druck  $p'$ ,

$d_{p't'}$  bei  $t^0$  und Druck  $p'$ ,

$\gamma = (15,942 + 0,01818 t) \cdot 10^{-6}$  ist der Wärmeausdehnungskoeffizient von Glas Nr. 59<sup>III</sup> nach Henning<sup>1)</sup>,

$\alpha$  ist die Kompressibilität des Glases nach den Messungen von Bridgman<sup>2)</sup>,

$\alpha = 2,23 \cdot 10^{-6}$  ist allerdings nur für mittlere Temperaturen bestimmt, doch hat sein Wert einen solchen geringen Einfluß auf das Resultat, daß seine ungenaue Kenntnis zu keinen Bedenken Veranlassung gibt.

$d_{pt}$  und daraus  $v$  berechnet sich aus der folgenden Formel, welche ausdrückt, daß bei der Druckänderung von  $p'$  auf  $p$  die Masse der Flüssigkeit ungeändert bleibt:

1) F. Henning, Ann. d. Phys. 40. p. 639. 1913.

2) P. W. Bridgman, Proc. Amer. Acad. 44. p. 255. 1909.



$$V_g(1 + \gamma t)(1 - \alpha p)d_{p,t} + (V_s + N\varphi)(1 + \gamma t')(1 - \alpha p)d_{p,t'} \\ = V_g(1 + \gamma t')(1 - \alpha p')d_{p',t'} + (V_s + N'\varphi)(1 + \gamma t')(1 - \alpha p')d_{p',t'}$$

und hieraus:

$$\frac{1}{v} = d_{p,t} = d_{p',t'} \frac{1 - \alpha p'}{1 - \alpha p} \\ + \frac{(1 + \gamma t')[(V_s + N'\varphi)(1 - \alpha p')d_{p',t'} - (V_s + N\varphi)(1 - \alpha p)d_{p,t}]}{(1 + \gamma t)V_g(1 - \alpha p)}$$

Um also für eine bestimmte Temperatur und verschiedene Drucke  $v$  berechnen zu können, muß man vorher für dieselben Drucke  $d_{p,t'}$  bestimmt haben und man muß für einen bestimmten Druck  $p'$ , z. B. für  $p' = 0$ ,  $d_{p',t'}$  kennen. Wenn  $p' = 0$  ist, so entnimmt man  $d_{p',t'}$  den früher angegebenen Dilatometermessungen, wenn dagegen  $p' > 0$  ist, einer vorhergehenden Piezometermessung.

Da  $d_{p',t'}$  mit geringerem Gewicht in die Formel eingeht, so genügt hier eine Genauigkeit von  $\frac{1}{2}$  Promille vollständig. Wenn daher in einem oder anderen Falle Piezometermessungen nicht genau bei  $t'$ , sondern bei etwas höheren und etwas niederen Temperaturen ausgeführt waren, so durften die Werte von  $d_{p',t'}$  durch Interpolation gefunden werden. Falls  $t$  gleich der Zimmertemperatur ist, so wird  $t = t'$ , und die Formel vereinfacht sich dementsprechend.

Es wurden, wie anfangs erwähnt, zwei Piezometer verwendet; beim einen war:

$$V_g = 2,18794, \quad \varphi = 0,001404, \quad V_s = 0,010506,$$

beim anderen, das am meisten benutzt wurde:

$$V_g = 2,37358, \quad \varphi = 0,002202, \quad V_s = 0,01337.$$

Nur bei den allertiefsten Temperaturen, bei denen die Kompressibilität sehr gering wird, gelang es hier und da, die Füllung so zu wählen, daß in einer einzigen Meßreihe der ganze Bereich von 0–1000 Atmosphären bewältigt wurde. Meistens war hierfür das Skalenrohr im Verhältnis zum gesamten Piezometervolumen zu klein und es mußten 2–3 Messungen mit verschiedenen großen Füllungen ausgeführt werden. Um aber einen genügend sicheren Anschluß der zweiten Meßreihe an die vorhergehende zu haben, wurde immer dafür gesorgt, daß die beiden wenigstens 100 Atmosphären übereinander griffen.

Die aus den Beobachtungen mit Hilfe der obigen Formel berechneten Werte wurden in Koordinatenpapier eingetragen und die Isothermenkurven möglichst gleichmäßig durchgezogen.

Für einige Isothermen wurde nach der bekannten Methode der Fehlerquadrate die mittlere Abweichung der einzelnen beobachteten Werte von den Kurvenwerten berechnet, und zwar ergab sich  $\pm 0,0001$  bis  $\pm 0,0002$ .

In den folgenden Tabellen VIII—XII sind für die verschiedenen Temperaturen und Drucke die Werte von  $v$  angegeben, welche den graphisch gefundenen Isothermen entnommen sind. Unter  $\mu$  steht die Kompressibilität, welche nach folgender Methode berechnet wurde:

Es ist:

$$\mu_p = \frac{v_{p+50} - v_{p-50}}{100 \cdot v_p},$$

wobei  $v_{p+50}$  das spezifische Volumen bei  $p + 50$  Atmosphären bedeutet.

Wenn die Unsicherheit von  $v \pm 0,0001$  ist, so steigt die von  $\mu$  bereits auf ungefähr  $\pm 1$  Proz. Die Werte von  $\mu_0$  und  $\mu_{1000}$  sind durch graphische Extrapolation gefunden.

Zur weiteren Kontrolle und zur Berechnung der Wärmeausdehnungskoeffizienten unter verschiedenen konstanten Drucken wurden die Isothermenwerte von  $v$  auch noch in ein Koordinatensystem, dessen Abszisse  $t$  und dessen Ordinate  $v$  war, eingetragen und die Kurven konstanten Druckes möglichst gleichmäßig durchgezogen. Wenn man bedenkt, daß die einzelnen eingetragenen Werte von  $v$  ganz verschiedenen Messungen entstammen, so ist die Übereinstimmung als gut zu bezeichnen, wenn sie im Mittel um  $0,00005$ — $0,00015$  von der Kurve abweichen.

Durch Auswertung der Isopiostenkurven erhält man die Tabellen XIII—XXII.

Die Wärmeausdehnungskoeffizienten sind nach der Formel

$$\alpha_t = \frac{v_{t+10} - v_{t-10}}{20 \cdot v_t}$$

berechnet.

Tabelle VIII.  
Pentan.

Temperatur	+ 9,7°		0°		- 20,80°		- 37,45°		- 49,84°		- 68,90°		- 87,7°		- 110,8°	
Druck Atm.	$v$	$\mu \cdot 10^5$	$v$	$\mu \cdot 10^5$	$v$	$\mu \cdot 10^5$	$v$	$\mu \cdot 10^5$	$v$	$\mu \cdot 10^5$	$v$	$\mu \cdot 10^5$	$v$	$\mu \cdot 10^5$	$v$	$\mu \cdot 10^5$
0	1,0150		1,0000	17,00	0,9696	14,00	0,9474	12,40	0,9318	11,10	0,9088	9,10	0,88730	7,70	0,8620	6,90
50	1,0055	17,90	0,99165	15,92	0,9632	12,92	0,9418	11,47	0,9268	10,36	0,9049	8,51	0,8840	7,29	0,8589	6,76
100	0,9970	16,25	0,9842	14,59	0,9572	12,17	0,9366	10,78	0,9222	9,65	0,9011	8,27	0,8808	7,04	0,8562	6,31
150	0,9898	14,81	0,9773	13,71	0,9515	11,51	0,9317	10,13	0,9179	9,15	0,8975	7,97	0,8778	6,83	0,8535	6,04
200	0,98235	13,54	0,9708	12,99	0,9462	10,92	0,9271	9,55	0,9138	8,75	0,8940	7,66	0,8748	6,68	0,8510	5,76
250	0,9760	12,65	0,9647	12,22	0,9412	10,51	0,9228	9,16	0,9099	8,35	0,8906	7,41	0,8720	6,42	0,8486	5,54
300	0,9700	12,06	0,9590	11,48	0,9368	10,09	0,9187	8,82	0,9062	8,00	0,8874	7,16	0,8692	6,21	0,8463	5,32
350	0,9643	11,46	0,9537	10,81	0,9317	9,60	0,9147	8,48	0,9026	7,64	0,8843	6,84	0,8666	6,00	0,8441	5,09
400	0,9589	10,79	0,9487	10,21	0,9274	9,11	0,9109	8,17	0,8993	7,34	0,8813	6,58	0,8640	5,79	0,8420	4,93
450	0,9539	10,17	0,9440	9,65	0,9233	8,61	0,9073	7,82	0,8960	7,14	0,8785	6,37	0,8616	5,63	0,8400	4,88
500	0,9492	9,64	0,9396	9,15	0,9194	8,21	0,9038	7,47	0,8929	6,94	0,8757	6,17	0,8592	5,53	0,8379	4,83
550	0,9448	9,26	0,9354	8,82	0,9157	7,92	0,9005	7,27	0,8898	6,74	0,8731	5,96	0,8568	5,43	0,8359	4,73
600	0,9405	8,98	0,9313	8,53	0,9122	7,67	0,8973	7,18	0,8869	6,60	0,8705	5,80	0,8545	5,32	0,8340	4,62
650	0,9363	8,70	0,9274	8,25	0,9087	7,43	0,8941	6,94	0,8840	6,45	0,8680	5,70	0,8523	5,28	0,8321	4,51
700	0,9323	8,42	0,9237	7,96	0,9054	7,13	0,8911	6,67	0,8812	6,24	0,8656	5,60	0,8500	5,12	0,8302	4,40
750	0,9285	8,08	0,9201	7,72	0,9023	6,82	0,8882	6,42	0,8785	6,03	0,8632	5,50	0,8479	4,89	0,8284	4,29
800	0,9248	7,74	0,9166	7,47	0,8993	6,56	0,8854	6,21	0,8759	5,88	0,8608	5,40	0,8459	4,79	0,8267	4,17
850	0,9213	7,38	0,9132	7,17	0,8964	6,41	0,8827	6,00	0,8733	5,78	0,8585	5,24	0,8439	4,68	0,8250	4,06
900	0,9180		0,9100	6,92	0,8935	6,32	0,8801	5,79	0,8708	5,68	0,8566	5,08	0,8419	4,57	0,8233	3,95
950			0,9069	6,84	0,8907	6,23	0,8776	5,64	0,8684	5,53	0,8542	4,98	0,8400	4,46	0,8217	3,83
1000			0,9038	6,66	0,8880	6,10	0,8751	5,60	0,8660	5,35	0,8521	4,90	0,8382	4,40	0,8202	3,80

Tabelle IX.  
Äther.

Temperatur	0°		-20,8°		-37,45°		-49,79°		-68,95°		-91,25°		-109,8°	
	$v$	$\mu \cdot 10^5$	$v$	$\mu \cdot 10^5$	$v$	$\mu \cdot 10^5$	$v$	$\mu \cdot 10^5$	$v$	$\mu \cdot 10^5$	$v$	$\mu \cdot 10^5$	$v$	$\mu \cdot 10^5$
0	1,0000	15,90	0,9698 <sub>5</sub>	12,20	0,9479	10,10	0,9324 <sub>5</sub>	9,00	0,9095 <sub>5</sub>	7,70	0,8844 <sub>5</sub>	6,40	0,8648	5,60
50	0,9927	13,90	0,9642	11,46	0,9433	9,54	0,9288 <sub>5</sub>	8,62	0,9061 <sub>5</sub>	7,34	0,8817	6,12	0,8624	5,45
100	0,9862	12,57	0,9589	10,69	0,9389	9,16	0,9244 <sub>5</sub>	8,28	0,9029	7,09	0,8790 <sub>5</sub>	5,92	0,8601	5,29
150	0,9803	11,73	0,9539 <sub>5</sub>	10,12	0,9347	8,77	0,9207	7,93	0,8997 <sub>5</sub>	6,89	0,8765	5,71	0,8578 <sub>5</sub>	5,13
200	0,9747	11,22	0,9492 <sub>5</sub>	9,64	0,9307	8,43	0,9171 <sub>5</sub>	7,58	0,8967	6,69	0,8740 <sub>5</sub>	5,55	0,8557	4,97
250	0,9698 <sub>5</sub>	10,80	0,9448	9,16	0,9266 <sub>5</sub>	8,13	0,9137 <sub>5</sub>	7,33	0,8937 <sub>5</sub>	6,43	0,8716 <sub>5</sub>	5,39	0,8536	4,86
300	0,9642	10,31	0,9406	8,72	0,9231 <sub>5</sub>	7,85	0,9104 <sub>5</sub>	7,14	0,8909 <sub>5</sub>	6,17	0,8693 <sub>5</sub>	5,25	0,8515 <sub>5</sub>	4,70
350	0,9594	9,80	0,9368	8,38	0,9196	7,50	0,9072 <sub>5</sub>	6,94	0,8882 <sub>5</sub>	5,97	0,8671	5,13	0,8496	4,58
400	0,9548	9,38	0,9327 <sub>5</sub>	8,09	0,9162 <sub>5</sub>	7,20	0,9041 <sub>5</sub>	6,75	0,8856 <sub>5</sub>	5,81	0,8649	4,97	0,8477	4,42
450	0,9504 <sub>5</sub>	8,99	0,9290 <sub>5</sub>	7,86	0,9130	7,01	0,9011 <sub>5</sub>	6,55	0,8831	5,72	0,8628	4,81	0,8458 <sub>5</sub>	4,32
500	0,9463 <sub>5</sub>	8,45	0,9254 <sub>5</sub>	7,62	0,9098 <sub>5</sub>	6,81	0,8982 <sub>5</sub>	6,35	0,8806	5,62	0,8607 <sub>5</sub>	4,71	0,8440 <sub>5</sub>	4,21
550	0,9424 <sub>5</sub>	8,22	0,9220	7,32	0,9068 <sub>5</sub>	6,62	0,8954 <sub>5</sub>	6,14	0,8781 <sub>5</sub>	5,52	0,8587 <sub>5</sub>	4,66	0,8423	4,10
600	0,9386	8,04	0,9187	7,08	0,9038 <sub>5</sub>	6,42	0,8927 <sub>5</sub>	5,94	0,8757 <sub>5</sub>	5,37	0,8567 <sub>5</sub>	4,61	0,8406	3,99
650	0,9349	7,76	0,9155	6,83	0,9010	6,27	0,8901 <sub>5</sub>	5,73	0,8734 <sub>5</sub>	5,21	0,8548	4,50	0,8389 <sub>5</sub>	3,87
700	0,9313 <sub>5</sub>	7,46	0,9124 <sub>5</sub>	6,58	0,8982	6,12	0,8876 <sub>5</sub>	5,58	0,8712	5,05	0,8529	4,40	0,8373 <sub>5</sub>	3,82
750	0,9279 <sub>5</sub>	7,17	0,9095	6,38	0,8955	5,92	0,8852	5,42	0,8690 <sub>5</sub>	4,83	0,8510 <sub>5</sub>	4,35	0,8357 <sub>5</sub>	3,77
800	0,9247	6,92	0,9066 <sub>5</sub>	6,23	0,8929	5,71	0,8828 <sub>5</sub>	5,27	0,8670	4,67	0,8492	4,30	0,8342	3,66
850	0,9215 <sub>5</sub>	6,73	0,9038 <sub>5</sub>	6,14	0,8904	5,56	0,8805 <sub>5</sub>	5,17	0,8650	4,57	0,8474	4,19	0,8327	3,60
900	0,9185	6,53	0,9011	6,05	0,8879 <sub>5</sub>	5,46	0,8783	5,12	0,8630 <sub>5</sub>	4,52	0,8456 <sub>5</sub>	4,08	0,8312	3,55
950	0,9155 <sub>5</sub>	6,43	0,8984	6,01	0,8855 <sub>5</sub>	5,47	0,8760 <sub>5</sub>	5,14	0,8611	4,47	0,8439 <sub>5</sub>	3,97	0,8297 <sub>5</sub>	3,50
1000	0,9126	6,35	0,8957	5,90	0,8831	5,35	0,8738	5,00	0,8592	4,45	0,8423	3,95	0,8263	3,45

Tabelle X.

Methylalkohol spez. Gewicht bei 0° 0,8138.

Tabelle X.  
Methylalkohol spez. Gewicht bei 0° 0,8128.

Temperatur	0°		- 20,8°		- 37,45°		- 49,94°		- 68,9°		- 91,35°		- 97,95°	
	$v$	$\mu \cdot 10^5$	$v$	$\mu \cdot 10^5$	$v$	$\mu \cdot 10^5$	$v$	$\mu \cdot 10^5$	$v$	$\mu \cdot 10^5$	$v$	$\mu \cdot 10^5$	$v$	$\mu \cdot 10^5$
Druck														
Atm.														
0	1,0000	10,02			0,9587 <sub>6</sub>	8,00	0,9457	7,49	0,9260	6,50	0,9028 <sub>6</sub>	5,60	0,8960 <sub>6</sub>	5,40
50	0,9951	9,59	0,9767	8,95	0,9550	7,70	0,9422	7,21	0,9230	6,34	0,9003	5,50	0,8936 <sub>6</sub>	5,26
100	0,9904 <sub>6</sub>	9,24	0,9683 <sub>6</sub>	8,21	0,9514	7,46	0,9389	6,92	0,9201 <sub>6</sub>	6,09	0,8979	5,29	0,8913 <sub>6</sub>	5,10
150	0,9859 <sub>6</sub>	8,92	0,9614 <sub>6</sub>	7,93	0,9479	7,28	0,9357	6,78	0,9174	5,94	0,8955 <sub>6</sub>	5,19	0,8891	5,06
200	0,9816 <sub>6</sub>	8,56	0,9607	7,60	0,9445	7,09	0,9326	6,54	0,9147	5,85	0,8932 <sub>6</sub>	5,09	0,8868 <sub>6</sub>	5,02
250	0,9775 <sub>6</sub>	8,18	0,9571 <sub>6</sub>	7,31	0,9412	6,85	0,9296	6,35	0,9120 <sub>6</sub>	5,76	0,8910	4,99	0,8846 <sub>6</sub>	4,92
300	0,9738 <sub>6</sub>	7,80	0,9537	7,08	0,9380 <sub>6</sub>	6,56	0,9267	6,15	0,9094 <sub>6</sub>	5,61	0,8888	4,95	0,8825	4,82
350	0,9699 <sub>6</sub>	7,47	0,9504	6,83	0,9350 <sub>6</sub>	6,31	0,9239	5,90	0,9069 <sub>6</sub>	5,40	0,8866	4,91	0,8804	4,71
400	0,9664	7,24	0,9472	6,65	0,9321 <sub>6</sub>	6,11	0,9212 <sub>6</sub>	5,70	0,9045 <sub>6</sub>	5,25	0,8844 <sub>6</sub>	4,75	0,8783 <sub>6</sub>	4,61
450	0,9629 <sub>6</sub>	7,06	0,9441	6,46	0,9293 <sub>6</sub>	5,92	0,9186 <sub>6</sub>	5,55	0,9032 <sub>6</sub>	5,15	0,8824	4,59	0,8763 <sub>6</sub>	4,50
500	0,9596	6,88	0,9411	6,27	0,9268 <sub>6</sub>	5,72	0,9161 <sub>6</sub>	5,40	0,8999	5,00	0,8804	4,49	0,8744 <sub>6</sub>	4,35
550	0,9563 <sub>6</sub>	6,69	0,9382	6,08	0,9240 <sub>6</sub>	5,52	0,9137	5,31	0,8977	4,79	0,8784 <sub>6</sub>	4,44	0,8725 <sub>6</sub>	4,24
600	0,9532	6,55	0,9354	5,88	0,9215 <sub>6</sub>	5,37	0,9113	5,16	0,8956	4,69	0,8765	4,45	0,8707	4,19
650	0,9501	6,42	0,9327	5,79	0,9191	5,28	0,9090	5,01	0,8935	4,64	0,8745 <sub>6</sub>	4,40	0,8689	4,09
700	0,9471	6,23	0,9300	5,70	0,9167	5,18	0,9067 <sub>6</sub>	4,91	0,8914 <sub>6</sub>	4,60	0,8726 <sub>6</sub>	4,30	0,8671 <sub>6</sub>	4,04
750	0,9442	6,04	0,9274	5,50	0,9143 <sub>6</sub>	5,14	0,9045 <sub>6</sub>	4,86	0,8894	4,55	0,8708	4,19	0,8654	3,99
800	0,9414	5,89	0,9249	5,41	0,9120	5,10	0,9023 <sub>6</sub>	4,82	0,8874	4,39	0,8690	4,09	0,8637	3,88
850	0,9386 <sub>6</sub>	5,75	0,9224	5,37	0,9097	5,00	0,9002 <sub>6</sub>	4,72	0,8855	4,29	0,8672 <sub>6</sub>	4,00	0,8620 <sub>6</sub>	3,77
900	0,9360	5,61	0,9199 <sub>6</sub>	5,22	0,9074 <sub>6</sub>	4,90	0,8981	4,62	0,8836	4,35	0,8655 <sub>6</sub>	3,87	0,8604 <sub>6</sub>	3,67
950	0,9334	5,46	0,9176	5,07	0,9052 <sub>6</sub>	4,86	0,8960	4,64	0,8817	4,26	0,8639	3,76	0,8589	3,61
1000	0,9309	5,40	0,9153	5,05	0,9030 <sub>6</sub>	4,72	0,8939 <sub>6</sub>	4,50	0,8798 <sub>6</sub>	4,10	0,8623	3,69	0,8573 <sub>6</sub>	3,54

Tabelle XI.  
Äthylalkohol spez. Gewicht bei 0° 0,8065.

Temperatur	0°		- 20,3°		- 37,45°		- 49,94°		- 62,80°		- 90,50°		- 111°	
	$\nu$	$\mu \cdot 10^5$	$\nu$	$\mu \cdot 10^5$	$\nu$	$\mu \cdot 10^5$	$\nu$	$\mu \cdot 10^5$	$\nu$	$\mu \cdot 10^5$	$\nu$	$\mu \cdot 10^5$	$\nu$	$\mu \cdot 10^5$
0	1,0000	9,9	0,9786	8,75	0,9623	8,00	0,9501	7,40	0,9317	6,40	0,9112 <sub>s</sub>	5,35	0,8916	4,80
50	0,9952	9,24	0,9745 <sub>s</sub>	8,11	0,9586	7,51	0,9467	6,97	0,9288	6,14	0,9089	5,12	0,8894	4,78
100	0,9908	8,58	0,9707	7,78	0,9551	7,12	0,9435	6,57	0,9260	5,94	0,9066	5,02	0,8873 <sub>s</sub>	4,56
150	0,9867	8,16	0,9670	7,45	0,9518	6,72	0,9405	6,27	0,9233	5,74	0,9043 <sub>s</sub>	4,98	0,8853 <sub>s</sub>	4,46
200	0,9827 <sub>s</sub>	7,89	0,9635	7,06	0,9487	6,43	0,9376	6,08	0,9207	5,54	0,9021	4,93	0,8831	4,36
250	0,9789 <sub>s</sub>	7,61	0,9602	6,78	0,9457	6,24	0,9348	5,94	0,9182	5,34	0,8999	4,83	0,8815	4,31
300	0,9753	7,33	0,9570	6,58	0,9428	6,05	0,9320 <sub>s</sub>	5,79	0,9158	5,13	0,8977 <sub>s</sub>	4,73	0,8796	4,26
350	0,9718	7,05	0,9539	6,39	0,9400	5,90	0,9294 <sub>s</sub>	5,65	0,9135	5,04	0,8956 <sub>s</sub>	4,63	0,8777 <sub>s</sub>	4,16
400	0,9684 <sub>s</sub>	6,82	0,9509	6,20	0,9372 <sub>s</sub>	5,76	0,9268	5,56	0,9112	4,99	0,8936	4,53	0,8753 <sub>s</sub>	4,05
450	0,9652	6,63	0,9480	6,07	0,9346	5,62	0,9242 <sub>s</sub>	5,41	0,9089 <sub>s</sub>	4,90	0,8916	4,37	0,8742	3,95
500	0,9620 <sub>s</sub>	6,44	0,9451 <sub>s</sub>	5,92	0,9320	5,47	0,9218	5,26	0,9067 <sub>s</sub>	4,80	0,8897	4,21	0,8725	3,84
550	0,9590	6,26	0,9424	5,78	0,9295	5,33	0,9194	5,17	0,9046	4,70	0,8878 <sub>s</sub>	4,17	0,8708 <sub>s</sub>	3,79
600	0,9560 <sub>s</sub>	6,07	0,9397	5,64	0,9270 <sub>s</sub>	5,18	0,9170 <sub>s</sub>	5,02	0,9025	4,60	0,8860	4,12	0,8692	3,74
650	0,9532	5,82	0,9371	5,44	0,9247	5,03	0,9148 <sub>s</sub>	4,86	0,9004 <sub>s</sub>	4,50	0,8842	4,07	0,8676	3,63
700	0,9505	5,58	0,9346	5,30	0,9224	4,93	0,9126	4,77	0,8984 <sub>s</sub>	4,40	0,8824	4,08	0,8660 <sub>s</sub>	3,58
750	0,9479	5,43	0,9321 <sub>s</sub>	5,15	0,9201 <sub>s</sub>	4,84	0,9104 <sub>s</sub>	4,61	0,8965	4,29	0,8806	4,03	0,8645	3,53
800	0,9453 <sub>s</sub>	5,34	0,9298	5,00	0,9179 <sub>s</sub>	4,74	0,9084	4,46	0,8946	4,25	0,8788 <sub>s</sub>	3,93	0,8630	3,48
850	0,9428 <sub>s</sub>	5,25	0,9275	4,91	0,9158	4,64	0,9064	4,38	0,8927	4,20	0,8771 <sub>s</sub>	3,88	0,8615	3,42
900	0,9404	5,16	0,9252 <sub>s</sub>	4,81	0,9137	4,54	0,9044 <sub>s</sub>	4,20	0,8908 <sub>s</sub>	4,15	0,8754 <sub>s</sub>	3,83	0,8600 <sub>s</sub>	3,37
950	0,9380	5,06	0,9230 <sub>s</sub>	4,71	0,9116 <sub>s</sub>	4,44	0,9026	4,04	0,8890	4,11	0,8738	3,72	0,8586	3,32
1000	0,9356 <sub>s</sub>	4,97	0,9209	4,64	0,9096 <sub>s</sub>	4,36	0,9008	4,10	0,8872	4,00	0,8722	3,70	0,8572	3,29

Tabelle XII.  
Schwefelkohlenstoff.

Temperatur	+ 14,9°		— 0°		— 20,8°		— 37,40°		— 49,94°		— 68,90°		— 87,75°		— 104,7°	
	$v$	$\mu \cdot 10^5$	$v$	$\mu \cdot 10^5$	$v$	$\mu \cdot 10^5$	$v$	$\mu \cdot 10^5$	$v$	$\mu \cdot 10^5$	$v$	$\mu \cdot 10^5$	$v$	$\mu \cdot 10^5$	$v$	$\mu \cdot 10^5$
0	1,0174	8,75	1,0000	7,85	0,9771	6,85	0,9598	6,05	0,9471	5,55	0,9287	4,95	0,9108	4,40	0,8950	3,92
50	1,0130 <sub>5</sub>	8,34	0,9967 <sub>5</sub>	7,53	0,9739 <sub>5</sub>	6,37	0,9569	5,96	0,9446	5,23	0,9264 <sub>5</sub>	4,80	0,9088	4,29	0,8932 <sub>5</sub>	3,86
100	1,0089 <sub>5</sub>	7,98	0,9925	7,25	0,9709	6,18	0,9541	5,76	0,9421	5,20	0,9242 <sub>5</sub>	4,71	0,9069	4,19	0,8915 <sub>5</sub>	3,76
150	1,0050	7,71	0,9889 <sub>5</sub>	7,05	0,9679 <sub>5</sub>	6,10	0,9514	5,57	0,9397	5,11	0,9221	4,61	0,9050	4,09	0,8899	3,60
200	1,0012	7,49	0,9855	6,85	0,9650	6,06	0,9488	5,43	0,9373	5,06	0,9200	4,57	0,9032	3,99	0,8883 <sub>5</sub>	3,49
250	0,9975	7,32	0,9822	6,62	0,9621	5,92	0,9462	5,34	0,9349	5,03	0,9179	4,52	0,9014	3,94	0,8868	3,50
300	0,9939	7,09	0,9790	6,44	0,9593	5,79	0,9437 <sub>5</sub>	5,25	0,9326	4,98	0,9158 <sub>5</sub>	4,42	0,8996 <sub>5</sub>	3,89	0,8852 <sub>5</sub>	3,50
350	0,9904 <sub>5</sub>	6,82	0,9759	6,20	0,9565 <sub>5</sub>	5,65	0,9413	5,10	0,9303	4,84	0,9138 <sub>5</sub>	4,32	0,8979	3,84	0,8837	3,45
400	0,9871	6,58	0,9729 <sub>5</sub>	6,01	0,9539	5,50	0,9389 <sub>5</sub>	4,95	0,9281	4,59	0,9119	4,22	0,8962	3,79	0,8822	3,40
450	0,9839 <sub>5</sub>	6,35	0,9700 <sub>5</sub>	5,88	0,9513	5,36	0,9366 <sub>5</sub>	4,86	0,9259 <sub>5</sub>	4,54	0,9100	4,07	0,8945	3,75	0,8807	3,41
500	0,9809	6,17	0,9672 <sub>5</sub>	5,69	0,9488	5,16	0,9344	4,71	0,9239	4,38	0,9082	3,91	0,8928 <sub>5</sub>	3,70	0,8792	3,41
550	0,9779	6,03	0,9645 <sub>5</sub>	5,55	0,9464	5,02	0,9322 <sub>5</sub>	4,56	0,9219	4,28	0,9064 <sub>5</sub>	3,86	0,8912	3,65	0,8777	3,36
600	0,9750	5,90	0,9619	5,46	0,9440 <sub>5</sub>	4,87	0,9301 <sub>5</sub>	4,46	0,9198 <sub>5</sub>	4,19	0,9047	3,81	0,8896	3,60	0,8762 <sub>5</sub>	3,31
650	0,9721 <sub>5</sub>	5,76	0,9593	5,37	0,9418	4,72	0,9281 <sub>5</sub>	4,32	0,9180 <sub>5</sub>	4,08	0,9030	3,77	0,8880	3,55	0,8748	3,26
700	0,9694	5,57	0,9567 <sub>5</sub>	5,28	0,9396	4,68	0,9260 <sub>5</sub>	4,37	0,9162	4,04	0,9013	3,77	0,8864 <sub>5</sub>	3,50	0,8734	3,21
750	0,9667 <sub>5</sub>	5,38	0,9542 <sub>5</sub>	5,19	0,9374	4,69	0,9240 <sub>5</sub>	4,33	0,9143 <sub>5</sub>	4,05	0,8996	3,72	0,8849	3,45	0,8720	
800	0,9642	5,24	0,9518	5,10	0,9352	4,65	0,9220 <sub>5</sub>	4,28	0,9125	4,00	0,8979 <sub>5</sub>	3,61	0,8834	3,34		
850	0,9617	5,20	0,9494	5,00	0,9330 <sub>5</sub>	4,61	0,9201 <sub>5</sub>	4,24	0,9107	3,95	0,8963 <sub>5</sub>	3,57	0,8819 <sub>5</sub>	3,29		
900	0,9592	5,16	0,9470 <sub>5</sub>	4,91	0,9309	4,57	0,9181 <sub>5</sub>	4,25	0,9089	3,96	0,8947 <sub>5</sub>	3,58	0,8805	3,24		
950	0,9567 <sub>5</sub>	5,12	0,9447 <sub>5</sub>	4,82	0,9288	4,47	0,9162	4,20	0,9071	3,91	0,8931 <sub>5</sub>	3,53	0,8791	3,19		
1000	0,9543	5,03	0,9425	4,75	0,9267 <sub>5</sub>	4,40	0,9143	4,12	0,9055 <sub>5</sub>	3,88	0,8916	3,50	0,8777	3,15		

1000 0,9356<sub>5</sub> 4,97 0,9208 4,64 0,9096<sub>5</sub> 4,36 0,9008 4,10 0,8872 4,00 0,8722 3,70 0,8572 3,29

Tabelle XIII.  
Pentan.

Druck	0°	— 10°	— 20°	— 30°	— 40°	— 50°	— 60°	— 70°	— 80°	— 90°	— 100°	— 110°
0	1.00000	0.98505	0.9708	0.9572	0.9442	0.93165	0.91945	0.90755	0.89595	0.88465	0.8736	0.8628
100	0.9842	0.9711	0.95835	0.9459	0.9339	0.9223	0.91105	0.9000	0.8891	0.8783	0.86765	0.85695
200	0.9708	0.95885	0.9471	0.93565	0.92455	0.9138	0.9033	0.89295	0.8827	0.87245	0.8622	0.8519
300	0.95905	0.9480	0.9372	0.92655	0.91615	0.9061	0.8962	0.8864	0.87665	0.86695	0.85725	0.84725
400	0.9487	0.93835	0.9282	0.91825	0.90855	0.8991	0.8897	0.88035	0.8711	0.86195	0.85255	0.84295
500	0.9396	0.9297	0.92015	0.9108	0.90165	0.8926	0.8836	0.8747	0.8659	0.8571	0.8481	0.83885
600	0.93135	0.92195	0.9128	0.90385	0.89515	0.88655	0.8780	0.8695	0.8610	0.8525	0.8438	0.83485
700	0.9237	0.9145	0.90605	0.89745	0.8891	0.8809	0.87275	0.8646	0.8564	0.8481	0.83965	0.8309
800	0.9166	0.9082	0.89985	0.8916	0.8835	0.8756	0.8677	0.85985	0.8520	0.8440	0.8357	0.82725
900	0.91005	0.9020	0.8940	0.8861	0.8783	0.8706	0.8629	0.8554	0.8479	0.8402	0.8322	0.82395
1000	0.9039	0.8961	0.8884	0.8809	0.8733	0.86585	0.85835	0.85115	0.84395	0.8366	0.82895	0.82100

Tabelle XIV.

 $\alpha$  von Pentan. 0,00.

Druck	0°	— 10°	— 20°	— 30°	— 40°	— 50°	— 60°	— 70°	— 80°	— 90°	— 100°	— 110°
Atm.	bis — 20°	bis — 30°	bis — 40°	bis — 50°	bis — 60°	bis — 70°	bis — 80°	bis — 90°	bis — 100°	bis — 110°		
0	148 <sub>1</sub>	143 <sub>6</sub>	138 <sub>9</sub>	135 <sub>1</sub>	132 <sub>9</sub>	131 <sub>1</sub>	129 <sub>4</sub>	127 <sub>9</sub>	126 <sub>2</sub>	125 <sub>1</sub>		
100	138 <sub>1</sub>	131 <sub>6</sub>	129 <sub>2</sub>	126 <sub>2</sub>	124 <sub>6</sub>	122 <sub>4</sub>	121 <sub>6</sub>	121 <sub>1</sub>	122 <sub>2</sub>	123 <sub>9</sub>		
200	123 <sub>7</sub>	122 <sub>2</sub>	120 <sub>9</sub>	118 <sub>2</sub>	116 <sub>4</sub>	115 <sub>7</sub>	115 <sub>2</sub>	116 <sub>1</sub>	117 <sub>4</sub>	119 <sub>9</sub>		
300	115 <sub>2</sub>	114 <sub>4</sub>	113 <sub>6</sub>	111 <sub>2</sub>	110 <sub>9</sub>	110 <sub>1</sub>	110 <sub>1</sub>	111 <sub>9</sub>	111 <sub>4</sub>	114 <sub>9</sub>		
400	109 <sub>2</sub>	108 <sub>2</sub>	107 <sub>9</sub>	105 <sub>4</sub>	104 <sub>9</sub>	103 <sub>2</sub>	103 <sub>6</sub>	105 <sub>9</sub>	107 <sub>6</sub>	111 <sub>1</sub>		
500	104 <sub>6</sub>	102 <sub>7</sub>	101 <sub>5</sub>	101 <sub>9</sub>	101 <sub>1</sub>	101 <sub>2</sub>	101 <sub>2</sub>	101 <sub>5</sub>	103 <sub>1</sub>	107 <sub>5</sub>		
600	100 <sub>7</sub>	099 <sub>2</sub>	097 <sub>6</sub>	096 <sub>9</sub>	095 <sub>7</sub>	097 <sub>1</sub>	097 <sub>7</sub>	098 <sub>9</sub>	100 <sub>9</sub>	104 <sub>9</sub>		
700	097 <sub>9</sub>	096 <sub>2</sub>	094 <sub>4</sub>	093 <sub>1</sub>	092 <sub>6</sub>	093 <sub>4</sub>	094 <sub>6</sub>	096 <sub>4</sub>	098 <sub>6</sub>	102 <sub>9</sub>		
800	092 <sub>2</sub>	092 <sub>2</sub>	091 <sub>7</sub>	090 <sub>4</sub>	090 <sub>2</sub>	090 <sub>7</sub>	091 <sub>2</sub>	093 <sub>2</sub>	096 <sub>2</sub>	100 <sub>9</sub>		
900	089 <sub>9</sub>	089 <sub>2</sub>	088 <sub>7</sub>	088 <sub>2</sub>	088 <sub>4</sub>	088 <sub>7</sub>	087 <sub>2</sub>	089 <sub>4</sub>	093 <sub>2</sub>	097 <sub>2</sub>		
1000	086 <sub>6</sub>	086 <sub>2</sub>	085 <sub>7</sub>	085 <sub>2</sub>	085 <sub>6</sub>	085 <sub>2</sub>	084 <sub>2</sub>	086 <sub>9</sub>	090 <sub>2</sub>	094 <sub>2</sub>		

Tabelle XV.

Ather.

Druck	0°	— 10°	— 20°	— 30°	— 40°	— 50°	— 60°	— 70°	— 80°	— 90°	— 100°	— 110°
-------	----	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	--------	--------



**Tabelle XV.**  
**Ather.**

Druck	0°	— 10°	— 20°	— 30°	— 40°	— 50°	— 60°	— 70°	— 80°	— 90°	— 100°	— 110°
0	1,0000	0,98515	0,97105	0,95755	0,94465	0,9322	0,92015	0,90835	0,8969	0,8858	0,8750	0,8646
100	0,9862	0,97255	0,95902	0,94775	0,9359	0,9242	0,9128	0,9017	0,8909	0,88035	0,8700	0,8599
200	0,9746	0,96185	0,9502	0,93895	0,92785	0,9169	0,90615	0,8956	0,8858	0,8763	0,86585	0,8555
300	0,9642	0,9523	0,94145	0,9309	0,9205	0,91025	0,90005	0,8900	0,88015	0,8705	0,86095	0,8514
400	0,9548	0,94385	0,93355	0,9236	0,91375	0,90395	0,89425	0,8847	0,87535	0,8660	0,85675	0,8475
500	0,9464	0,9361	0,9263	0,91685	0,90745	0,8981	0,8888	0,8797	0,87075	0,8618	0,85285	0,8439
600	0,9388	0,92885	0,91955	0,9105	0,90155	0,8926	0,88365	0,8749	0,86635	0,85775	0,84915	0,8405
700	0,93135	0,9221	0,9132	0,90455	0,8960	0,88745	0,8799	0,87045	0,86215	0,8539	0,8456	0,83725
800	0,92465	0,9158	0,9073	0,8990	0,8908	0,8826	0,8744	0,86625	0,8582	0,85015	0,84215	0,8341
900	0,9185	0,9099	0,90175	0,89385	0,8860	0,8781	0,87015	0,86225	0,8544	0,8466	0,8388	0,8310
1000	0,9126	0,9042	0,8964	0,8888	0,8812	0,8736	0,8660	0,8584	0,8508	0,8432	0,8356	0,82805

Tabelle XVI.

von Äther.	0,00...
------------	---------

Druck Atm.	0° bis - 20°	- 10° bis - 30°	- 20° bis - 40°	- 30° bis - 50°	- 40° bis - 60°	- 50° bis - 70°	- 60° bis - 80°	- 70° bis - 90°	- 80° bis - 100°	- 90° bis - 110°
0	146 <sub>8</sub>	142 <sub>1</sub>	137 <sub>6</sub>	134 <sub>1</sub>	131 <sub>3</sub>	129 <sub>7</sub>	128 <sub>1</sub>	125 <sub>6</sub>	123 <sub>7</sub>	121 <sub>1</sub>
100	135 <sub>1</sub>	129 <sub>1</sub>	126 <sub>6</sub>	125 <sub>7</sub>	125 <sub>6</sub>	123 <sub>5</sub>	121 <sub>3</sub>	119 <sub>7</sub>	118 <sub>9</sub>	117 <sub>6</sub>
200	126 <sub>6</sub>	119 <sub>1</sub>	119 <sub>1</sub>	118 <sub>9</sub>	118 <sub>2</sub>	117 <sub>4</sub>	116 <sub>4</sub>	114 <sub>7</sub>	113 <sub>9</sub>	111 <sub>3</sub>
300	119 <sub>3</sub>	113 <sub>7</sub>	112 <sub>3</sub>	112 <sub>1</sub>	112 <sub>3</sub>	112 <sub>7</sub>	111 <sub>9</sub>	110 <sub>1</sub>	110 <sub>4</sub>	111 <sub>0</sub>
400	112 <sub>9</sub>	108 <sub>5</sub>	107 <sub>1</sub>	107 <sub>5</sub>	107 <sub>9</sub>	107 <sub>8</sub>	106 <sub>9</sub>	106 <sub>6</sub>	107 <sub>4</sub>	107 <sub>9</sub>
500	107 <sub>5</sub>	103 <sub>9</sub>	102 <sub>1</sub>	103 <sub>5</sub>	103 <sub>3</sub>	103 <sub>5</sub>	102 <sub>5</sub>	102 <sub>3</sub>	103 <sub>9</sub>	104 <sub>9</sub>
600	102 <sub>6</sub>	99 <sub>3</sub>	98 <sub>7</sub>	99 <sub>3</sub>	100 <sub>2</sub>	100 <sub>1</sub>	98 <sub>9</sub>	99 <sub>9</sub>	100 <sub>1</sub>	101 <sub>0</sub>
700	99 <sub>8</sub>	96 <sub>1</sub>	95 <sub>7</sub>	95 <sub>4</sub>	96 <sub>6</sub>	96 <sub>6</sub>	96 <sub>3</sub>	96 <sub>0</sub>	97 <sub>0</sub>	98 <sub>7</sub>
800	99 <sub>4</sub>	92 <sub>1</sub>	91 <sub>7</sub>	92 <sub>0</sub>	92 <sub>2</sub>	93 <sub>4</sub>	93 <sub>5</sub>	93 <sub>3</sub>	94 <sub>4</sub>	95 <sub>3</sub>
900	92 <sub>1</sub>	89 <sub>0</sub>	88 <sub>2</sub>	88 <sub>6</sub>	90 <sub>0</sub>	91 <sub>0</sub>	91 <sub>3</sub>	91 <sub>6</sub>	92 <sub>0</sub>	93 <sub>0</sub>
1000	89 <sub>9</sub>	85 <sub>9</sub>	85 <sub>5</sub>	86 <sub>3</sub>	87 <sub>0</sub>	87 <sub>7</sub>	87 <sub>9</sub>	88 <sub>3</sub>	89 <sub>1</sub>	90 <sub>9</sub>

Tabelle XVII.  
Methylalkohol spez. Gewicht bei 0° 0.8128.

Druck	0°	— 10°	— 20°	— 30°	— 40°	— 50°	— 60°	— 70°	— 80°	— 90°	— 100°
0	1,00000	0,9886	0,9775	0,9667	0,9561	0,9456	0,9352	0,9249	0,91455	0,9042	0,8939
100	0,9904	0,97965	0,96915	0,9589	0,9488	0,9389	0,9290	0,91905	0,9091	0,8992	0,88935
200	0,98165	0,9714	0,9615	0,9517	0,9421	0,93255	0,92305	0,91355	0,9040	0,8945	0,88495
300	0,97355	0,96395	0,95445	0,94505	0,9358	0,9266	0,9175	0,90835	0,8992	0,8900	0,8807
400	0,9663	0,9571	0,94795	0,9389	0,9300	0,9212	0,9124	0,9036	0,8947	0,8857	0,8766
500	0,95955	0,95065	0,9418	0,9331	0,92455	0,9161	0,9076	0,8990	0,8904	0,8816	0,8727
600	0,95315	0,94455	0,9360	0,9277	0,91945	0,91125	0,9030	0,8946	0,8862	0,8776	0,86895
700	0,94705	0,9388	0,93065	0,9226	0,9146	0,90665	0,8987	0,8905	0,8822	0,8738	0,86535
800	0,94135	0,9334	0,9255	0,9177	0,9100	0,90225	0,8945	0,88655	0,8784	0,8702	0,8619
900	0,93595	0,92825	0,9206	0,9130	0,9055	0,8980	0,8905	0,88275	0,8748	0,8668	0,8587
1000	0,93085	0,92335	0,9159	0,9085	0,90115	0,89385	0,8865	0,8790	0,8713	0,8635	0,8556

Tabelle XVIII.

 $\alpha$  von Methylalkohol. 0,00...

Druck Atm.	0°	— 10°	— 20°	— 30°	— 40°	— 50°	— 60°	— 70°	— 80°	— 90°	— 100°
0	bis — 20°	bis — 30°	bis — 40°	bis — 50°	bis — 60°	bis — 70°	bis — 80°	bis — 90°	bis — 100°		
100	113 <sub>9</sub>	112 <sub>0</sub>	110 <sub>7</sub>	110 <sub>6</sub>	110 <sub>6</sub>	110 <sub>7</sub>	111 <sub>3</sub>	113 <sub>1</sub>	114 <sub>3</sub>		
200	108 <sub>6</sub>	107 <sub>0</sub>	106 <sub>9</sub>	105 <sub>4</sub>	105 <sub>4</sub>	106 <sub>9</sub>	108 <sub>1</sub>	109 <sub>1</sub>	109 <sub>6</sub>		
300	099 <sub>1</sub>	102 <sub>5</sub>	102 <sub>0</sub>	101 <sub>7</sub>	102 <sub>1</sub>	102 <sub>0</sub>	104 <sub>1</sub>	105 <sub>2</sub>	106 <sub>4</sub>		
400	095 <sub>5</sub>	099 <sub>0</sub>	098 <sub>5</sub>	098 <sub>6</sub>	098 <sub>6</sub>	099 <sub>5</sub>	100 <sub>7</sub>	102 <sub>0</sub>	104 <sub>6</sub>		
500	083 <sub>4</sub>	093 <sub>1</sub>	092 <sub>5</sub>	091 <sub>6</sub>	092 <sub>5</sub>	094 <sub>1</sub>	095 <sub>6</sub>	100 <sub>0</sub>	102 <sub>1</sub>		
600	080 <sub>0</sub>	089 <sub>0</sub>	088 <sub>5</sub>	089 <sub>6</sub>	090 <sub>5</sub>	092 <sub>2</sub>	093 <sub>6</sub>	095 <sub>6</sub>	098 <sub>5</sub>		
700	087 <sub>4</sub>	087 <sub>0</sub>	087 <sub>6</sub>	087 <sub>9</sub>	087 <sub>7</sub>	089 <sub>9</sub>	092 <sub>6</sub>	094 <sub>6</sub>	096 <sub>4</sub>		
800	084 <sub>0</sub>	084 <sub>6</sub>	084 <sub>7</sub>	085 <sub>3</sub>	085 <sub>0</sub>	087 <sub>5</sub>	090 <sub>0</sub>	093 <sub>1</sub>	094 <sub>4</sub>		
900	082 <sub>7</sub>	082 <sub>8</sub>	082 <sub>7</sub>	082 <sub>7</sub>	083 <sub>8</sub>	085 <sub>6</sub>	088 <sub>5</sub>	091 <sub>4</sub>	092 <sub>2</sub>		
1000	081 <sub>1</sub>	081 <sub>1</sub>	081 <sub>8</sub>	081 <sub>1</sub>	081 <sub>2</sub>	082 <sub>9</sub>	086 <sub>4</sub>	089 <sub>6</sub>	091 <sub>4</sub>		

Tabelle XIX.

Äthylalkohol spez. Gewicht bei 0° 0,8065.

Druck	+ 10	— 0°	— 10°	— 20°	— 30°	— 40°	— 50°	— 60°	— 70°	— 80°	— 90°	— 100°	— 110°
0	bis — 10°	bis — 20°	bis — 30°	bis — 40°	bis — 50°	bis — 60°	bis — 70°	bis — 80°	bis — 90°	bis — 100°	bis — 110°		
100	113 <sub>9</sub>	112 <sub>0</sub>	110 <sub>7</sub>	110 <sub>6</sub>	110 <sub>6</sub>	110 <sub>7</sub>	111 <sub>3</sub>	113 <sub>1</sub>	114 <sub>3</sub>				
200	108 <sub>6</sub>	107 <sub>0</sub>	106 <sub>9</sub>	105 <sub>4</sub>	105 <sub>4</sub>	106 <sub>9</sub>	108 <sub>1</sub>	109 <sub>1</sub>	109 <sub>6</sub>				
300	099 <sub>1</sub>	102 <sub>5</sub>	102 <sub>0</sub>	101 <sub>7</sub>	102 <sub>1</sub>	102 <sub>0</sub>	104 <sub>1</sub>	105 <sub>2</sub>	106 <sub>4</sub>				
400	095 <sub>5</sub>	099 <sub>0</sub>	098 <sub>5</sub>	098 <sub>6</sub>	098 <sub>6</sub>	099 <sub>5</sub>	100 <sub>7</sub>	102 <sub>0</sub>	104 <sub>6</sub>				
500	083 <sub>4</sub>	093 <sub>1</sub>	092 <sub>5</sub>	091 <sub>6</sub>	092 <sub>5</sub>	094 <sub>1</sub>	095 <sub>6</sub>	100 <sub>0</sub>	102 <sub>1</sub>				
600	080 <sub>0</sub>	089 <sub>0</sub>	088 <sub>5</sub>	089 <sub>6</sub>	090 <sub>5</sub>	092 <sub>2</sub>	093 <sub>6</sub>	095 <sub>6</sub>	098 <sub>5</sub>				
700	087 <sub>4</sub>	087 <sub>0</sub>	087 <sub>6</sub>	087 <sub>9</sub>	087 <sub>7</sub>	089 <sub>9</sub>	092 <sub>6</sub>	094 <sub>6</sub>	096 <sub>4</sub>				
800	084 <sub>0</sub>	084 <sub>6</sub>	084 <sub>7</sub>	085 <sub>3</sub>	085 <sub>0</sub>	087 <sub>5</sub>	090 <sub>0</sub>	093 <sub>1</sub>	094 <sub>4</sub>				
900	082 <sub>7</sub>	082 <sub>8</sub>	082 <sub>7</sub>	082 <sub>7</sub>	083 <sub>8</sub>	085 <sub>6</sub>	088 <sub>5</sub>	091 <sub>4</sub>	092 <sub>2</sub>				
1000	081 <sub>1</sub>	081 <sub>1</sub>	081 <sub>8</sub>	081 <sub>1</sub>	081 <sub>2</sub>	082 <sub>9</sub>	086 <sub>4</sub>	089 <sub>6</sub>	091 <sub>4</sub>				

Tabelle XIX.

Äthylalkohol spez. Gewicht bei 0° 0,8065.

Druck	+ 10°	- 0°	- 10°	- 20°	- 30°	- 40°	- 50°	- 60°	- 70°	- 80°	- 90°	- 100°	- 110°
0	1,0106	1,0000	0,9896	0,97945	0,9695	0,9597	0,9500	0,94035	0,93075	0,9212	0,9117	0,90215	0,8926
100	1,0006	0,9908	0,98105	0,97145	0,9620	0,95265	0,9434	0,9342	0,92505	0,9159	0,9068	0,8976	0,88835
200	0,9920	0,9827	0,97345	0,9643	0,9553	0,94635	0,9375	0,9287	0,91985	0,9110	0,9022	0,8933	0,88435
300	0,9841	0,97525	0,96645	0,9577	0,9491	0,94055	0,9320	0,9235	0,9149	0,90635	0,8978	0,88915	0,88045
400	0,9770	0,96845	0,95995	0,9515	0,94325	0,93505	0,9268	0,91855	0,91025	0,90195	0,8936	0,8852	0,8768
500	0,9703	0,96205	0,9539	0,9458	0,9378	0,92985	0,92185	0,91385	0,90585	0,89775	0,88965	0,8815	0,8733
600	0,9640	0,9560	0,9482	0,9404	0,9327	0,9249	0,9171	0,90935	0,90165	0,89385	0,88595	0,8780	0,8700
700	0,9581	0,9505	0,9429	0,93535	0,92775	0,9202	0,9126	0,9051	0,8976	0,89005	0,8824	0,8747	0,8668
800	0,9526	0,9453	0,93795	0,9305	0,9231	0,9158	0,9084	0,9011	0,89375	0,88640	0,8790	0,87145	0,8638
900	0,94745	0,94035	0,93315	0,92595	0,91875	0,9116	0,9044	0,89725	0,89005	0,88285	0,87565	0,8683	0,8608
1000	0,94255	0,9356	0,9286	0,9216	0,91465	0,90765	0,9006	0,8935	0,8864	0,87935	0,8723	0,8652	0,8579

Tabelle XX.

 $\alpha$  von Äthylalkohol. 0,00...

Druck Atm.	+ 10°	- 0°	- 10°	- 20°	- 30°	- 40°	- 50°	- 60°	- 70°	- 80°	- 90°	- 100°	- 110°
0	105 <sub>9</sub>	103 <sub>9</sub>	102 <sub>7</sub>	101 <sub>9</sub>	101 <sub>7</sub>	101 <sub>9</sub>	102 <sub>9</sub>	102 <sub>9</sub>	103 <sub>9</sub>	104 <sub>9</sub>	104 <sub>9</sub>	105 <sub>9</sub>	105 <sub>9</sub>
100	098 <sub>7</sub>	098 <sub>6</sub>	098 <sub>6</sub>	097 <sub>7</sub>	097 <sub>6</sub>	097 <sub>6</sub>	098 <sub>9</sub>	098 <sub>9</sub>	099 <sub>9</sub>	099 <sub>9</sub>	100 <sub>9</sub>	102 <sub>9</sub>	102 <sub>9</sub>
200	094 <sub>4</sub>	094 <sub>4</sub>	094 <sub>4</sub>	094 <sub>4</sub>	094 <sub>4</sub>	094 <sub>4</sub>	095 <sub>9</sub>	096 <sub>1</sub>	096 <sub>9</sub>	098 <sub>1</sub>	098 <sub>1</sub>	099 <sub>9</sub>	099 <sub>9</sub>
300	090 <sub>6</sub>	090 <sub>6</sub>	090 <sub>6</sub>	090 <sub>6</sub>	090 <sub>6</sub>	091 <sub>4</sub>	092 <sub>9</sub>	093 <sub>7</sub>	094 <sub>4</sub>	095 <sub>9</sub>	095 <sub>9</sub>	097 <sub>6</sub>	097 <sub>6</sub>
400	088 <sub>6</sub>	088 <sub>6</sub>	087 <sub>7</sub>	087 <sub>4</sub>	088 <sub>6</sub>	089 <sub>9</sub>	090 <sub>1</sub>	091 <sub>4</sub>	092 <sub>3</sub>	093 <sub>9</sub>	093 <sub>9</sub>	094 <sub>9</sub>	094 <sub>9</sub>
500	085 <sub>9</sub>	085 <sub>9</sub>	086 <sub>1</sub>	085 <sub>1</sub>	085 <sub>9</sub>	086 <sub>7</sub>	087 <sub>6</sub>	088 <sub>6</sub>	089 <sub>3</sub>	090 <sub>9</sub>	091 <sub>4</sub>	092 <sub>7</sub>	092 <sub>7</sub>
600	082 <sub>6</sub>	082 <sub>6</sub>	082 <sub>4</sub>	083 <sub>1</sub>	084 <sub>4</sub>	084 <sub>4</sub>	085 <sub>9</sub>	086 <sub>9</sub>	087 <sub>6</sub>	088 <sub>9</sub>	089 <sub>4</sub>	090 <sub>9</sub>	090 <sub>9</sub>
700	079 <sub>9</sub>	080 <sub>4</sub>	081 <sub>6</sub>	081 <sub>6</sub>	082 <sub>4</sub>	082 <sub>4</sub>	082 <sub>9</sub>	083 <sub>9</sub>	084 <sub>9</sub>	085 <sub>4</sub>	087 <sub>4</sub>	087 <sub>4</sub>	087 <sub>4</sub>
800	077 <sub>6</sub>	078 <sub>6</sub>	079 <sub>6</sub>	079 <sub>6</sub>	080 <sub>9</sub>	080 <sub>6</sub>	081 <sub>9</sub>	082 <sub>9</sub>	083 <sub>9</sub>	083 <sub>9</sub>	085 <sub>9</sub>	085 <sub>9</sub>	087 <sub>2</sub>
900	076 <sub>6</sub>	077 <sub>1</sub>	077 <sub>7</sub>	078 <sub>4</sub>	078 <sub>9</sub>	079 <sub>4</sub>	080 <sub>9</sub>	080 <sub>9</sub>	081 <sub>6</sub>	081 <sub>6</sub>	083 <sub>1</sub>	083 <sub>1</sub>	085 <sub>6</sub>
1000	074 <sub>6</sub>	075 <sub>4</sub>	075 <sub>7</sub>	076 <sub>9</sub>	077 <sub>4</sub>	078 <sub>6</sub>	079 <sub>9</sub>	079 <sub>9</sub>	080 <sub>9</sub>	081 <sub>1</sub>	081 <sub>1</sub>	083 <sub>1</sub>	083 <sub>1</sub>

Tabelle XXI.

Schwefelkohlenstoff.

Druck	+ 10°	0°	- 10°	- 20°	- 30°	- 40°	- 50°	- 60°	- 70°	- 80°	- 90°	- 100°
0	1,01155	1,0000	0,9889	0,97805	0,96745	0,9571	0,94705	0,93725	0,92765	0,91815	0,90875	0,8994
100	1,00345	0,9925	0,9820	0,9717	0,9616	0,9517	0,94205	0,93255	0,9232	0,9140	0,9049	0,89585
200	0,9959	0,9855	0,9755	0,96565	0,9560	0,9465	0,93715	0,9280	0,9190	0,9101	0,9013	0,8925
300	0,9889	0,9790	0,9694	0,95995	0,95065	0,94145	0,93245	0,9236	0,9149	0,9063	0,89775	0,88925
400	0,9824	0,97295	0,9637	0,9546	0,9456	0,9367	0,9280	0,9194	0,9110	0,9027	0,8944	0,8861
500	0,97635	0,96725	0,95835	0,94955	0,94085	0,93225	0,9238	0,9155	0,9073	0,8992	0,8911	0,8830
600	0,97085	0,9619	0,9533	0,9448	0,9364	0,9281	0,9199	0,9118	0,9038	0,8958	0,88785	0,87995
700	0,9652	0,95675	0,9484	0,9402	0,9321	0,92405	0,91615	0,9083	0,9004	0,8925	0,8847	0,8770
800	0,9600	0,9518	0,94365	0,9357	0,9279	0,92015	0,91245	0,9048	0,8971	0,8894	0,88175	0,87415
900	0,9551	0,9470	0,93915	0,9314	0,9238	0,9163	0,90885	0,9014	0,8939	0,8864	0,87895	
1000	0,9504	0,9425	0,93485	0,9273	0,91985	0,9125	0,90525	0,8980	0,8907	0,88345	0,8762	

Tabelle XXII.

 $\alpha$  von Schwefelkohlenstoff. 0,00...

Druck Atm.	+ 10° bis - 10°	0° bis - 20°	- 10° bis - 30°	- 20° bis - 40°	- 30° bis - 50°	- 40° bis - 60°	- 50° bis - 70°	- 60° bis - 80°	- 70° bis - 90°	- 80° bis - 100°
0	113 <sub>88</sub>	110 <sub>9</sub>	109 <sub>9</sub>	108 <sub>1</sub>	106 <sub>4</sub>	104 <sub>8</sub>	103 <sub>4</sub>	102 <sub>9</sub>	102 <sub>9</sub>	103 <sub>1</sub>
100	108 <sub>1</sub>	105 <sub>9</sub>	104 <sub>9</sub>	104 <sub>1</sub>	102 <sub>9</sub>	101 <sub>8</sub>	101 <sub>1</sub>	100 <sub>9</sub>	100 <sub>1</sub>	100 <sub>9</sub>
200	103 <sub>9</sub>	101 <sub>1</sub>	101 <sub>1</sub>	100 <sub>1</sub>	099 <sub>9</sub>	098 <sub>7</sub>	097 <sub>9</sub>	097 <sub>9</sub>	097 <sub>9</sub>	097 <sub>9</sub>
300	099 <sub>9</sub>	098 <sub>9</sub>	097 <sub>9</sub>	097 <sub>9</sub>	096 <sub>7</sub>	095 <sub>6</sub>	095 <sub>1</sub>	094 <sub>6</sub>	094 <sub>6</sub>	094 <sub>6</sub>
400	096 <sub>1</sub>	095 <sub>9</sub>	094 <sub>9</sub>	094 <sub>9</sub>	093 <sub>9</sub>	092 <sub>9</sub>	092 <sub>9</sub>	091 <sub>7</sub>	091 <sub>9</sub>	092 <sub>9</sub>
500	093 <sub>9</sub>	092 <sub>9</sub>	092 <sub>9</sub>	092 <sub>9</sub>	091 <sub>7</sub>	090 <sub>7</sub>	090 <sub>1</sub>	089 <sub>9</sub>	089 <sub>9</sub>	090 <sub>9</sub>
600	090 <sub>1</sub>	089 <sub>7</sub>	089 <sub>9</sub>	089 <sub>1</sub>	088 <sub>9</sub>	088 <sub>6</sub>	088 <sub>9</sub>	088 <sub>9</sub>	089 <sub>9</sub>	089 <sub>9</sub>
700	087 <sub>7</sub>	087 <sub>9</sub>	086 <sub>7</sub>	086 <sub>7</sub>	086 <sub>9</sub>	086 <sub>6</sub>	086 <sub>9</sub>	087 <sub>9</sub>	087 <sub>9</sub>	087 <sub>9</sub>
800	085 <sub>4</sub>	085 <sub>4</sub>	084 <sub>9</sub>	083 <sub>9</sub>	083 <sub>9</sub>	084 <sub>1</sub>	084 <sub>6</sub>	085 <sub>6</sub>	086 <sub>6</sub>	086 <sub>6</sub>
900	084 <sub>9</sub>	083 <sub>4</sub>	082 <sub>4</sub>	081 <sub>9</sub>	081 <sub>9</sub>	082 <sub>9</sub>	082 <sub>9</sub>	084 <sub>6</sub>	084 <sub>6</sub>	084 <sub>6</sub>
1000	082 <sub>9</sub>	081 <sub>9</sub>	080 <sub>9</sub>	080 <sub>9</sub>	080 <sub>9</sub>	080 <sub>9</sub>	081 <sub>9</sub>	081 <sub>9</sub>	082 <sub>9</sub>	082 <sub>9</sub>

W  
vor alle  
zu. D  
Zweifeln  
wurde  
nämlich  
sphären  
Druck  
Bei die  
den frü  
gehalten  
der Fo  
 $V_0(1 +$   
=  
wobei  
geänd  
des Sk  
spricht  
Di  
oben b  
die Zw  
Ein  
3. Teil  
moleku  
D  
schung  
spreche  
A

Wie die Tabellen zeigen, nimmt  $\alpha$  bei tiefen Temperaturen, vor allem unter höherem Druck, mit abnehmender Temperatur zu. Da dies Resultat etwas befremdlich erschien und zu Zweifeln an seiner Richtigkeit Veranlassung geben möchte, wurde wenigstens in zwei Fällen die Isopiesterie direkt bestimmt; nämlich für Methylalkohol unter einem Druck von 488 Atmosphären zwischen  $-50,15^\circ$  und  $-99,80^\circ$ , und unter einem Druck von 688 Atmosphären zwischen  $-41,15^\circ$  und  $-94,88^\circ$ . Bei diesen Piezometermessungen wurde also im Gegensatz zu den früheren die Temperatur variiert und der Druck konstant gehalten. Die Berechnung erfolgt in ganz analoger Weise aus der Formel:

$$V_g(1 + \gamma t)(1 - \alpha p)d_{p,t} + (V_s + N\varphi)(1 + \gamma t')(1 - \alpha p)d_{p,t'} \\ = V_g(1 + \gamma \vartheta)(1 - \alpha p)d_{p,\vartheta} + (V_s + N'\varphi)(1 - \alpha p)d_{p,\vartheta}',$$

wobei die Temperatur des Bades vom Ausgangswert  $\vartheta$  auf  $t$  geändert wird, während ebenso wie früher  $t'$  die Temperatur des Skalenrohres bedeutet. Die Anzahl Skalenteile  $N$  entspricht der Temperatur  $t$ ,  $N'$  der Temperatur  $\vartheta$ .

Die Ergebnisse dieser beiden Messungen stimmen mit den oben besprochenen Isopiesterienkurven vorzüglich überein, so daß die Zweifel an ihrer Richtigkeit behoben sein dürften.

Eine theoretische Auswertung der Resultate soll in einem 3. Teil, in welchem sowohl die thermodynamischen wie die molekular-theoretischen Beziehungen behandelt werden, folgen.

Der rheinischen Gesellschaft für wissenschaftliche Forschung, mit deren Hilfe wir die Untersuchungen ausführten, sprechen wir unseren wärmsten Dank aus.

Aachen, Juli 1915.

(Eingegangen 2. Dezember 1915.)

# 6. Nachtrag zu „M. Ehrhardt, Über elektrische Schwingungen in Luft und längs Drähten“.

(Ann. d. Phys. 47. Heft 14. p. 809 ff. 1915.)

Herr Professor W. König hatte die Freundlichkeit mich darauf aufmerksam zu machen, daß der Ausdruck „Intensität“ (l. c. p. 821 Z. 10 und 6 v. u. und entsprechend p. 831 Z. 8 v. u.) zu Mißdeutungen Veranlassung geben kann.

Unter „Intensität“ ist hier die „el. Kraft“ verstanden, welche nach H. Hertz (Wied. Ann. 36. p. 7. 1889) für größere Entfernungen dem Abstände umgekehrt proportional gesetzt ist (vgl. dazu H. Herrmann, Diss. Halle 1913, p. 21). Der durch das Thermoelement verursachte Galvanometerausschlag ist dem *Quadrate* dieser Größe proportional, was auch in der Fig. 7 (p. 822) zum Ausdruck kommt.

(Eingegangen 22. Januar 1916.)

1.  
Gitter

(1)

wo  $l$ ,  $n$   
tiven,  
A  
deren

(2)

ist ihr

E  
hierdu  
2.

1)  
p. 1-3

Ann